RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Socio S. Pincherle.

Nel marzo del 1899 presentavo alla R. Accademia una Nota recante lo stesso titolo di questa, in cui dimostravo per altra via e generalizzavo il seguente teorema dato dall'Hurwitz (1): « se due funzioni analitiche, uni- « formi regolari per il punto $x = \infty$, sono rappresentate in un intorno di « quel punto rispettivamente da

$$(1) \qquad \alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}}\ ,\ \varphi(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}}\ ,$$

« la serie

$$(2) \qquad \psi(x) = \sum \left(a_n k_0 + n a_{n-1} k_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} k_2 + \cdots + a_0 k_n \right) \frac{1}{x^{n+1}}$$

« rappresenta una funzione i cui punti singolari sono i punti $p_i + q_j$, p_i es- « sendo i punti singolari di $\alpha(x)$ e q_j quelli di $\beta(x)$ ». La dimostrazione era data dall'A. per il caso che p_i, q_j fossero poli di prim'ordine; quella da me data si applicava a punti singolari isolati qualunque, ammessa l'uniformità delle funzioni. Ora, nella presente Nota, mi propongo di mostrare:

1° come la proposizione possa valere per il caso di singolarità qualunque, costituite da punti, linee od aree;

(1) Comptes rendus de l'Académie des sciences, 6 février 1899.

2° come una seconda espressione, analoga a (2) per le sue proprietà, ma ben diversa di forma, valga a definire una funzione formata con due funzioni date e le cui singolarità sono legate nello stesso modo con quelle delle date;

3° come, dalle singolarità di una funzione definita da uno sviluppo

$$\sum c_n x_n$$

sia possibile, in molti casi, di dedurre immediatamente il luogo delle singolarità della funzione definita da

$$\sum c_n p_n(x) \tag{3}$$

essendo $p_n(x)$ un sistema determinato di funzioni analitiche.

1. Abbiansi due funzioni analitiche $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ aventi singolarità qualsiansi: punti, linee od aree. Se le funzioni sono polidrome, siano fatti fra i luoghi di singolarità tali tagli da introdurre la monodromia: in tale caso, comprenderemo codesti tagli fra i luoghi di singolarità. Sia U l'insieme delle singolarità di $\varphi(t)$, V l'insieme di quelle di $\alpha(t)$; u indichi un punto generico di U, v un punto generico di V. Togliendo dal piano-sfera su cui si rappresenta la variabile t l'insieme di punti indicato con U, rimanga un'area U'; togliendo V, rimanga un'area V'; supporremo U' e V' connesse, e contenenti entrambe il punto $t = \infty$. Veniamo dunque a considerare due rami ad un valore $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ di funzioni analitiche, regolari in U' e V' rispettivamente, compreso il punto $t = \infty$.

2. Tracciamo nel piano t una linea l chiusa, finita e semplice, che includa tutto l'insieme U: i punti di l appartengano tutti ad U'. Questa linea si può deformare con continuità fra i seguenti estremi: da una parte, un cerchio (R) di centro arbitrario, p. es. $t = 0$, e di raggio R grande a piacere; dall'altra, l'insieme delle linee (l_i) chiuse, semplici, circondanti le varie parti staccate U_i di U, e prossime al contorno di U_i tanto quanto si vuole; così, se U_i consta di un punto isolato, (l_i) sarà un cerchio avente per centro questo punto e raggio arbitrariamente piccolo. Indichiamo con U_l l'area inclusa dalla l, contorno compreso; con U'_l ciò che rimane dal piano t dopo tolta U_l; analogamente $U_{(l_i)}$ è l'insieme delle aree incluse dalle (l_i), contorni compresi, ed $U'_{(l_i)}$ ciò che rimane dopo tolto $U_{(l_i)}$ al piano t. Ad ogni punto u di U_l facciamo corrispondere il punto $u - v$, v essendo un punto generico di V; quando u descrive U_l, $u - v$ descrive un'area congruente: variando v in V, si ha un complesso di aree che indicheremo complessivamente con $(U - V)_l$. Sia infine W_l ciò che rimane dal piano t quando vi si tolga l'area $(U - V)_l$; analoga definizione per $W_{(l_i)}$.

Sia x un punto di W_l; allora il punto $x + v$ ci darà, per ogni v, un punto di U'_l; se infatti così non fosse, $x + v$ appartenendo ad U_l, x apparterrebbe ad $(U - V)_l$.

Se l va restringendosi e tendendo alle (l_i), W_l in corrispondenza andrà dilatandosi; cioè se x appartiene a W_l, esso appartiene ad ogni $W_{l'}$ dove l' è compresa fra l e le l_i, ed *a fortiori* appartiene a $W_{(l_i)}$.

3. Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t-x)\, dt, \tag{4}$$

x essendo un punto arbitrariamente preso in una delle parti connesse che costituiscono W_l. Per tali determinazioni di x, la linea l non conterrà singolarità nè di $\varphi(t)$, nè di $\alpha(t-x)$ fra i suoi punti; l'espressione (4) rappresenta pertanto un ramo ad un valore di funzione analitica, e variando la linea (l) facendola tendere verso $W_{(l_i)}$, quel ramo di funzione analitica sarà rappresentato in un'area connessa sempre maggiore e tendente ad una delle parti connesse che costituiscono $W_{(l_i)}$. L'espressione della funzione analitica $\lambda(x)$ si può fare coincidere con

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{(l_i)} \varphi(t)\, \alpha(t-x)\, dt. \tag{5}$$

Se accade che $W_{(l_i)}$ sia un'area connessa, la (5) rappresenterà in tutta $W_{(l_i)}$ una funzione analitica le cui singolarità o linee di discontinuità saranno esclusivamente nell'area $(U - V)_{(l_i)}$.

In particolare, se tanto l'insieme U delle singolarità di $\varphi(t)$ come quello V delle singolarità di $\alpha(t)$ constano di punti separati u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi, la $\lambda(x)$ sarà uniforme, coi soli punti singolari $u_i - v_j$. Se le $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ non sono uniformi, ma occorre tracciare dei tagli $u_i \dots u_h$, $v_j \dots v_k$ per stabilire la monodromia di un ramo di ciascuna di queste funzioni, anche $\lambda(x)$ sarà in generale uniforme, e ai tagli ora accennati corrisponderanno tagli $u_i - v_j \dots u_i - v_k$ e $u_i - v_j \dots u_h - v_j$.

4. Poichè tanto U′ che V′ contengono il punto all'infinito del piano-sfera, lo stesso sarà evidentemente di W_l; perciò, per $|x|$ abbastanza grande, la $\lambda(x)$ sarà sviluppabile in serie di potenze intere negative di x, mentre per $|t|$ abbastanza grande, si ha

$$\alpha(t) = \sum \frac{a_n}{t^{n+1}}\ ,\quad \varphi(t) = \sum \frac{k_n}{t^{n+1}};$$

precisamente il primo di questi sviluppi vale per $|t| > r$, dove r è il massimo modulo dei punti v; il secondo per $|t| > r'$, essendo r' il massimo modulo dei punti u. Si prenda come linea l il cerchio (R), facendosi $R > r'$; indi si prenda

$$|x| > R + r.$$

Si avrà:

$$\alpha(t-x)=\sum\frac{a_n}{(t-x)^{n+1}}, \tag{6}$$

ed essendo $|t|>r'$, $|x|>R+r>r'+r$, sarà $|t-x|>r$. Perciò la serie (6) si può sviluppare per le potenze decrescenti di x, dando lo sviluppo

$$\alpha(t-x)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_0 t^\nu-\nu a_{\nu-1}t^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}a_{\nu-2}t^{\nu-2}-\cdots+(-1)^\nu a_\nu\right)\frac{1}{x^{\nu+1}}$$

assolutamente ed uniformemente convergente per tutti i punti t del cerchio R e sotto la posta condizione $|x|>R+r$. Sostituendo in (4) e integrando termine a termine, si ottiene:

$$\lambda(x)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_0 k_\nu-\nu a_1 k_{\nu-1}+\cdots+(-1)^\nu a_\nu k_0}{x^{\nu+1}}, \tag{7}$$

e questo sviluppo, valido per l'intorno di $x=\infty$, serve a definire mediante la continuazione analitica in tutta l'area $W_{(l_i)}$, un ramo ad un valore di funzione analitica, le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti di $(U-V)_{(l_i)}$. Nel caso che le singolarità di $\alpha(t)$ e $\varphi(t)$ siano punti isolati, u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni siano uniformi, la $\lambda(x)$ dà, colla continuazione analitica, una funzione pure uniforme e che può avere singolarità solo nei punti u_i-v_j: questo risultato contiene quello dell'Hurwitz come caso particolare.

5. Possiamo ora ottenere una formula che lega in modo analogo due funzioni date, in guisa cioè che le singolarità della funzione risultante dipendano colla stessa legge dianzi indicata da quelle delle funzioni componenti, mentre fra i coefficienti di questo nuovo sviluppo e quelli della (7) si presenta una correlazione notevole: quella stessa che ha luogo fra lo sviluppo binomiale per esponente intero positivo e quello per esponente intero negativo. A questo effetto, sia $\alpha(t)$ una funzione definita come precedentemente; sia $\varphi(t)$ una funzione o ramo di funzione analitica data regolare entro una stella U' di vertice $t=0$; $\varphi(t)$ ammetterà dunque, nell'intorno di $t=0$, uno sviluppo

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}k'_\nu t^\nu. \tag{8}$$

Indichiamo con U l'insieme dei punti posti al contorno o all'esterno della stella U'. Infine supponiamo che l'insieme V dei punti singolari v di $\alpha(t)$ sia tutto interno ad U'.

Descriviamo una linea l semplice, chiusa, tutta contenuta entro U', circondante il punto $t=0$ e racchiudente l'insieme V: sia U'_l l'area chiusa da l, U_l l'insieme dei punti esterni e sul contorno di l.

Per ogni punto u di U_l, costruiamo di ogni punto v di V il corrispondente punto $u - v$; l'insieme di questi punti costituirà un'area $U_l - V$, e tolta questa dal piano della variabile, resterà un'area W_l, in cui, per le ipotesi, è certamente contenuto il punto zero. Sia X_l la parte semplicemente connessa di W_l che contiene il punto zero; quando la linea l si deforma con continuità, avvicinandosi al contorno della stella U', si deformerà corrispondentemente, ampliandosi, anche l'area X_l, in guisa che se l è incluso in l_1, anche X_l fa parte di X_{l_1}. Fissiamo una posizione di l, sia ϱ la minima distanza di l dai punti di V, e descriviamo il cerchio (ϱ) di centro zero e raggio ϱ.

Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\,\alpha(t-x)\,dt. \tag{9}$$

Per la scelta della linea d'integrazione e per essere preso x entro W_l, le singolarità di $\alpha(t-x)$ sono i punti $t = x + v$, che cadono tutti entro U'_l. Al contorno l, $\varphi(t)$ ed $\alpha(t-x)$ sono prive di singolarità, e pertanto $\lambda(x)$ rappresenta entro X_l un ramo ad un valore di funzione analitica, continuabile analiticamente in tutta la stella X di vertice $x = 0$ cui tende X_l quando U'_l tende ad U'. Ma, fatto $|x| < \varrho$, si può sviluppare $\alpha(t-x)$ collo sviluppo di Taylor

$$\alpha(t-x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} x^\nu \alpha^{(\nu)}(t)$$

e questo convergerà uniformemente per tutti i valori di t su l e di x entro (ϱ). Si potrà quindi integrare termine a termine, e verrà così lo sviluppo di $\lambda(x)$ in serie di potenze di x, valido entro (ϱ):

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu\ ,\ g_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\pi i\,\nu!}\int_{(l)} \varphi(t)\,\alpha^{(\nu)}(t)\,dt. \tag{10}$$

La serie (10) è dedotta dalla (8) mediante un'operazione distributiva, appartenente al gruppo permutabile colla derivazione, nel modo stesso della (2), e la funzione analitica che essa definisce non può avere le sue singolarità fuori dei posti $u - v$. Se, in particolare, l'insieme delle singolarità U consta di un numero finito di aree semplicemente connesse finite, escludenti il punto $t = 0$, e più particolarmente ancora se consta di punti isolati, e se in U' e V', $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi e $\varphi(\infty) = 0$, la $\lambda(x)$ sarà una funzione uniforme che coincide all'infuori del segno, con quella definita al § 3.

6. La formula che si è annunciata al principio del § 5 per porla in riscontro colla (2), si deduce facilmente dalla (10). Supponiamo che il mas-

simo modulo dei punti v sia inferiore al minimo modulo dei punti u. In tale caso si può descrivere una linea l chiusa, circondante il punto $t = 0$ ed i punti v, e tutta posta entro la corona circolare in cui convergono ad un tempo gli sviluppi $\sum k'_\nu t^\nu$ di $\varphi(t)$ in serie di potenze intere positive e $\sum \frac{a_\nu}{t^{\nu+1}}$ di $\alpha(t)$ in serie di potenze intere negative. Il coefficiente g_ν [formula (10)] viene allora dato da

$$g_\nu = a_0 k'_\nu + (\nu + 1) a_1 k'_{\nu+1} + \binom{\nu+2}{2} a_2 k'_{\nu+2} + \cdots ,$$

e si ottiene in tale guisa la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_0 k'_\nu + (\nu + 1) a_1 k'_{\nu+1} + \cdots \right) x^\nu \tag{11}$$

come definizione di una funzione analitica che fa perfetto riscontro a quella definita dalla (7), con cui può anche coincidere come nel caso accennato alla fine del paragrafo precedente, e le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti $u - v$.

Non mi sembra fuori di luogo di insistere sul riscontro che passa fra le successioni dei coefficienti degli sviluppi (7) e (11); esse si possono rappresentare simbolicamente con

$$(a + k)^\nu \quad , \quad (a + k)^{-\nu}$$

formate con le successioni date a_ν e k_ν sviluppando secondo la regola binomiale e sostituendo, secondo un'ovvia convenzione, gli indici agli esponenti, e fra simili successioni, in più di un caso, viene fatto di notare un manifesto parallelismo.

7. Consideriamo la funzione $\varphi(t)$, uniforme, regolare nell'intorno di $t = \infty$ e che, per $|t| > r$, ammetta lo sviluppo

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{t^{\nu+1}} . \tag{12}$$

Le singolarità di $\varphi(t)$ siano nei punti isolati $u_1 , u_2 , \ldots u_p$. Sia poi $\alpha(t , x)$ una funzione analitica delle due variabili t , x, regolare per tutte le coppie di valori delle variabili, ad eccezione di quelle che verificano una o più relazioni analitiche

$$\pi(t , x) = 0 . \tag{13}$$

Si circondino i punti singolari u_i di $\varphi(t)$ mediante una linea finita l chiusa e semplice o composta di un numero finito di curve semplici chiuse non includentisi nè intersecantisi; indichiamo con U_l l'area (di uno o più

pezzi) racchiusa da l; sia $\bar{u}$ un punto generico di U_l o del contorno. Ad ogni punto $\bar{u}$, la relazione

$$\pi(\bar{u}, x) = 0 \tag{14}$$

fa corrispondere un sistema di punti x che, quando $\bar{u}$ descrive U_l ed il contorno, descrivono nel piano x un sistema di aree che indicheremo con V_l. Se la linea l si deforma, restringendosi, e tendendo ad un sistema di p cerchi (u_i) di centri u_i e di raggi piccoli a piacere, varieranno in corrispondenza le aree V_l, tendendo ad un sistema di aree V_i; sia X_l ciò che rimane dal piano x togliendovi V_l, X_i ciò che rimane togliendovi V_i; è chiaro che X_l è compreso in X_i, mentre da X_i sono esclusi, in generale con aree piccole a piacere, i punti radici delle equazioni

$$\pi(u_i, x) = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots p)\,. \tag{15}$$

Consideriamo ora l'integrale, in cui l è percorsa nel senso positivo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt\,. \tag{16}$$

Per ogni punto x di X_l, non cade alcuna singolarità di $\alpha(t, x)$ sulla linea l nè nel campo U_l da essa racchiuso, poichè se $\bar{u}$ fosse una tale singolarità, x sarebbe radice della (14), cioè apparterrebbe a V_l. Perciò, per x in X_l, l'integrale (16) è uguale a

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{p}\int_{(u_i)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt\,, \tag{17}$$

e se i punti radici delle (15) sono separati, $\lambda(x)$ è una funzione analitica, rappresentata da (16) entro X_l e da (17) entro tutto X_i.

Ciò posto, abbiasi per $\alpha(t, x)$ uno sviluppo in serie di potenze di t

$$\alpha(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x)\, t^\nu\,; \tag{18}$$

le $\alpha_\nu(x)$ sono funzioni analitiche determinate ed il raggio di convergenza dello sviluppo è, in generale, funzione di x: ad un raggio di convergenza superiore ad un numero positivo c corrisponde un campo R_c nel piano x, e per $c' > c$, $R_{c'}$ è contenuto in R_c. Per un dato t, $|t| < c$ e per x in R_c, la serie (18) converge uniformemente (1).

(1) V. la mia Memoria: *Sui sistemi di funzioni analitiche.* Ann. di Mat., S. II, T. XII.

Ora, sia c il massimo modulo dei punti della linea l; si prenda x nel campo Z comune ad R_c e ad X_l; per tali valori di x si ha:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\,\alpha(t\,,x)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x)\int_{(l)} \varphi(t)\,t^\nu\,dt$$

e quindi

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\,\alpha_\nu(x)\,. \tag{19}$$

Entro il campo Z, la funzione $\lambda(x)$ è dunque rappresentata dallo sviluppo (19), convergente uniformemente; se ne conclude che « una serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\,\alpha_\nu(x)\,,$$

« dove le k_ν sono i coefficienti nello sviluppo (12) di una funzione uni-« forme $\varphi(t)$ di cui le u_i sono i punti singolari, definisce una funzione i cui « punti singolari sono soltanto le radici delle equazioni (15) ». Come caso particolare si ottiene facilmente una notevole proposizione che mi è stata cortesemente comunicata, di recente, per lettera, dal sig. dott. G. Faber di Carlsruhe: che cioè se le $\alpha_\nu(x)$ sono i polinomi di Legendre, i punti singolari della funzione definita da (19) sono soltanto quelli della forma

$$\frac{1}{2}\left(u_i + \frac{1}{u_i}\right).$$

Matematica. — *Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Fisica. — *Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas.* Nota del Socio Augusto Righi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Socio U. DINI.

La risoluzione del problema di Dirichlet in un campo finito col metodo di Fredholm (1), dipende dalla considerazione di un'equazione funzionale, la quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che la corrispondente equazione omogenea non ne ammette alcuna. Similmente l'integrazione delle equazioni dell'isotropia elastica in un campo finito, nel caso di dati spostamenti in superficie, si può far dipendere dalla considerazione di un sistema di equazioni funzionali (2), il quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che il corrispondente sistema omogeneo non ne ammette alcuna.

Volendo estendere il metodo di Fredholm alla risoluzione del problema di Dirichlet in un campo infinito, l'equazione funzionale, che per analogia bisogna considerare, è tale invece che la corrispondente equazione omogenea ammette già una soluzione evidente; sicchè l'equazione non omogenea almeno in generale non ne ammette alcuna. La medesima difficoltà si presenta, quando si voglia estendere il metodo, esposto nella mia citata Nota, al caso dei solidi elastici indefiniti.

Qui mi propongo di dimostrare che tanto il metodo di Fredholm per la risoluzione del problema di Dirichlet, quanto quello da me dato per l'integrazione delle equazioni della isotropia elastica, convenientemente adoperati, servono ancora nel caso dei campi infiniti.

In ciò che segue, indicherò con i simboli $(F)_1$, $(F)_2$ rispettivamente la citata Nota del sig. Fredholm e la sua Memoria degli Acta mathematica (t. 27): *Sur une classe d'équations fonctionnelles*; col simbolo (L) la mia citata Nota.

ART. I. — *Problema di Dirichlet in un campo infinito.*

1. Sia C una curva chiusa, la quale goda delle seguenti proprietà:

1° ammette la tangente determinata in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° esiste una lunghezza D tale che, preso un punto s qualsiasi di C e considerate le due parallele alla normale in s e distanti da essa del seg-

(1) *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm.

(2) Vedi la mia Nota: *Sull'integrazione delle equazioni dell'equi...*, Rendic. della R. Acc. dei Lincei, aprile 1906.

mento D, la posizione C_D di C compresa tra queste parallele sia incontrata in un punto al più da qualunque altra parallela alla detta normale:

3° esiste un numero finito positivo a tale che, indicando con ϑ l'angolo che la normale n in s fa con la normale n_0 in un altro punto qualsiasi s_0 di C e indicando con r_0 la distanza ss_0, si abbia:

$$\vartheta < a r_0 .$$

Queste condizioni ci autorizzano a ritenere validi per la linea C i noti teoremi sugli *strati* e *doppi strati lineari*.

2. Sia $\psi(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C, data ad arbitrio. Si consideri l'equazione funzionale:

$$(1) \qquad \psi(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi(s)\,ds ,$$

con $\varphi(s)$ funzione incognita. Questa equazione è tale che la corrispondente equazione omogenea:

$$(1)' \qquad 0 = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\,ds$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(s) = 1$; di modo che il *determinante* D [1] dell'equazione (1) è nullo [2]; e quindi l'equazione (1) in generale non ammette soluzione alcuna [3].

Dimostriamo anzitutto che l'equazione (1)' non ammette alcuna altra soluzione linearmente indipendente da quella già notata; ossia che *qualunque funzione* $\varphi_1(s)$ *finita e continua, la quale soddisfa alla* (1)', *deve necessariamente essere costante.*

Infatti indichiamo con r il segmento che congiunge un punto (x, y) qualsiasi del piano con un punto variabile $s \equiv (\xi, \eta)$ di C; e consideriamo il *doppio strato lineare*:

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r}{dn}\varphi_1(s)\,ds .$$

Chiamando $p' \equiv (x, y)$ un punto del campo infinito σ' limitato da C; $p \equiv (x, y)$ un punto del campo finito σ; s_0 un punto di C, si ha, come è noto,

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\,ds ,$$

$$\lim_{p=s} V(x, y) = -\varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\,ds ;$$

[1] Questa è la denominazione introdotta dal sig. Fredholm nella $(F)_1$ pag. 41.
[2] Vedi $(F)_2$, pag. 375.
[3] Ibid., pag. 377.

e in virtù della (1)′:

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = 0 \quad , \quad \lim_{p=s_0} V(x, y) = -2\varphi_1(s_0). \tag{2}$$

Adunque la funzione armonica $V(x, y)$ è nulla nei punti di σ'; sicchè la $\frac{dV}{dn}$, calcolata dalla parte di σ', sarà nulla in tutti i punti di C, e, in forza di un noto teorema di Liapounoff, sarà $\frac{dV}{dn} = 0$ anche dalla parte di σ. Ne segue allora che la funzione $V(x, y)$ è costante in tutto il campo σ, e, in virtù della seconda delle (2), $\varphi_1(s) = \text{cost.}$

3. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm [1] ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, è che, per la funzione data* $\psi(s)$, *si abbia*:

$$\int_C \psi(s)\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,, \tag{3}$$

dove $\Psi_1(s)$ *è una certa funzione finita e continua, che dipende dalla funzione* $\frac{d \lg r_0}{dn}$.

Supposto adunque che la $\psi(s)$ verifichi la (3) e che $\varphi(s)$ sia la corrispondente soluzione finita e continua della (1), si consideri il *doppio strato lineare*:

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r}{dn}\, \varphi(s)\, ds. \tag{4}$$

Si ha:

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\, \varphi(s)\, ds = \psi(s_0)\,.$$

Quindi, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *verifica la* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (4).

4. Nel caso in cui la funzione data $\psi(s)$ non verifica la (3), indicando con r_0' il segmento variabile, che congiunge un punto fisso qualsiasi p interno a σ con un punto variabile s di C, si può determinare una costante A in modo che sia:

$$\int_C \{\psi(s) - A \log r_0'\}\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,, \tag{3}'$$

a meno che non si avesse:

$$\int_C \lg r_0' \,.\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,.$$

[1] Vedi $(F)_2$, pag. 378.

Ma in questo caso, soddisfacendo la funzione $\log r'_0$ alla condizione (3), avremmo che la funzione armonica del campo σ', la quale nei punti di C coincide con la funzione $\log r'_0$, ossia la funzione $\log r'$, dove r' indica il segmento congiungente il punto fisso p col punto variabile p' del campo σ', dovrebbe, in virtù del risultato del § precedente, potersi rappresentare mediante un *doppio strato lineare*, ciò che, come è notorio, non è possibile. Quindi *il coefficiente di* A *nell'equazione* (3)′ *è sempre diverso da zero.*

Determinata adunque la costante A nel modo anzidetto, si consideri l'equazione funzionale:

$$(1)'' \qquad \psi(s_0) - A \log r'_0(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi(s)\, ds .$$

Questa equazione, in virtù della (3)′, ammette una soluzione $\varphi(s)$, e la funzione:

$$(5) \qquad V'(x, y) = A \log r' + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r}{dn}\varphi(s)\, ds ,$$

con essa costruita, ci dà:

$$\lim_{p'=s_0} V'(x, y) = A \log r'_0(s_0) + \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi(s)\, ds = \psi(s_0) .$$

Dunque, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *non verifica la condizione* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (5).

Art. II. — *Integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.*

5. Riprendiamo qui le notazioni introdotte nella (L) e le condizioni ivi poste sulla natura della superficie σ; e aggiungiamo, ai risultati stabiliti nel § 1 della (L), i due segmenti:

1°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio indefinito S′, che a distanza infinita si annullino come l'inversa della distanza di un punto fisso dal punto variabile (x, y, z) e le loro derivate prime come il quadrato di questa inversa, e che nei punti di σ si abbia:

$$u = v = w = 0 .$$

Risulta immediatamente dalle (2), (3) della (L) per $k > -\frac{2}{3}$:

$$\text{(in tutto S')} \qquad u = v = w = 0 .$$

2°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio S, e che nei punti di σ si abbia:

$$X_\sigma = Y_\sigma = Z_\sigma = 0 .$$

Risulta anche qui dalle (2), (3) della (L) per $k > -\frac{2}{3}$, indicando con a, b, c tre costanti arbitrarie,

(in tutto S) $\quad u = a \quad , \quad v = b \quad , \quad w = c.$

6. Siano $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ tre funzioni finite e continue dei punti di σ, date ad arbitrio. Si consideri il sistema di equazioni funzionali [1]:

$$(6)\quad \begin{cases} -u(\alpha_0, \beta_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\varphi(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\chi(\alpha, \beta)\}\, d\sigma, \\ -v(\alpha_0, \beta_0) = \psi(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\varphi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

con $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ funzioni incognite. Questo sistema di equazioni è tale che il corrispondente sistema omogeneo:

$$(6)'\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\varphi_1(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\psi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ 0 = \psi_1(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\cdot\varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(\alpha, \beta) = a$, $\psi_1(\alpha, \beta) = b$, $\chi_1(\alpha, \beta) = c$, con a, b, c costanti arbitrarie; di modo che il sistema (6) in generale non ammette soluzione alcuna [2].

Dimostriamo anzitutto che *qualunque soluzione delle* (6)′ *deve necessariamente essere costante.* Infatti formino le funzioni finite e continue $\varphi_1(\alpha, \beta)$, $\psi_1(\alpha, \beta)$, $\chi_1(\alpha, \beta)$ una soluzione del sistema (6)′. Si considerino le espressioni:

$$(7)\quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma\cdot\varphi_1(\alpha, \beta) + Y'_\sigma\cdot\psi_1(\alpha, \beta) + Z'_\sigma\cdot\chi_1(\alpha, \beta)\}\, d\sigma, \\ \Psi_1(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma\cdot\varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

[1] Cfr. le equazioni (11) della (L) e l'equazione (1) dell'Art. I.

[2] Vedi $(F)_2$, pag. 378, 379.

Posto $p_0 \equiv (\alpha_0 , \beta_0)$, si ha, in virtù delle (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} \Phi_1(x , y , z) = -\varphi_1(\alpha_0 , \beta_0) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha , \beta \ ; \ \alpha_0 , \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha , \beta) + \cdots \} \, d\sigma ,$$

. . . . . ;

$$\lim_{p=p_0} \Phi_1(x , y , z) = \quad \varphi_1(\alpha_0 , \beta_0) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha , \beta \ ; \ \alpha_0 , \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha , \beta) + \cdots \} \, d\sigma ,$$

. . . . . ;

e quindi, in forza delle (6)′,

$$(8) \quad \begin{cases} \lim\limits_{p'=p_0} \Phi_1(x , y , z) = 0 \ , \ \lim\limits_{p'=p_0} \Psi_1(x , y , z) = 0 \ , \ \lim\limits_{p'=p_0} X_1(x , y , z) = 0 ; \\ \lim\limits_{p=p_0} \Phi_1(x , y , z) = 2\varphi_1(\alpha_0 , \beta_0) \ , \ \lim\limits_{p=p_0} \Psi_1(x , y , z) = 2\psi_1(\alpha_0 , \beta_0) , \ldots \end{cases}$$

Adunque le funzioni $\Phi_1(x , y , z)$, $\Psi_1(x , y , z)$, $X_1(x , y , z)$, considerate come funzioni dei punti di S′, sono integrali delle equazioni (1) della (L) e nei punti di σ prendono valori nulli; sicchè, in forza del 1° risultato al § 5, si ha:

$$\text{(in tutto S')} \qquad \Phi_1(x , y , z) = \Psi_1(x , y , z) = X_1(x , y , z) = 0 ;$$

e quindi le corrispondenti espressioni (9) della (L):

$$P_1(x , y , z)_0 \quad , \quad Q_1(x , y , z)_0 \quad , \quad R_1(x , y , z)_0$$

saranno nulle qualunque sia il punto $p_0 \equiv (\alpha_0 , \beta_0)$ di σ e qualunque sia il punto $p' \equiv (x , y , z)$ di S′. Avremo dunque:

$$\lim_{p'=p_0} P_1(x , y , z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q_1(x , y , z)_0 = \lim_{p'=p_0} R_1(x , y , z)_0 = 0 ;$$

e, in virtù dell'ultimo teorema al § 3 della (L),

$$\lim_{p=p_0} P_1(x , y , z)_0 = \lim_{p=p_0} Q_1(x , y , z)_0 = \lim_{p=p_0} R_1(x , y , z)_0 = 0 .$$

Queste espressioni rappresentano le X_σ , Y_σ , Z_σ, corrispondenti agli integrali (7) delle equazioni (1) della (L), considerati come funzioni dei punti (x , y , z) del campo finito S; per cui risulterà, in forza del 2° risultato al § 5,

$$\text{(in tutto S)} \qquad \Phi_1(x , y , z) = 2a \ , \ \Psi_1(x , y , z) = 2b \ , \ X_1(x , y , z) = 2c ,$$

con a , b , c costanti arbitrarie; e quindi, in causa delle (8),

$$\varphi_1(\alpha \ \beta) = a \ , \ \psi_1(\alpha , \beta) = b \ , \ \chi_1(\alpha , \beta) = c .$$

Adunque le equazioni omogenee (6)′ non ammettono alcuna altra soluzione, all'infuori di quella già segnalata.

7. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm sulle equazioni funzionali ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema di equazioni* (6) *ammetta una soluzione, è che le funzioni date* $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ *soddisfino alla condizione*:

$$(9)\quad \int_\sigma \{u(\alpha,\beta)\cdot\Psi_1(\alpha,\beta)+v(\alpha,\beta)\,\Psi_1'(\alpha,\beta)+w(\alpha,\beta)\,\Psi_1''(\alpha,\beta)\}\,d\sigma=0,$$

dove $\Psi_1(\alpha,\beta)$, $\Psi_1'(\alpha,\beta)$, $\Psi_1''(\alpha,\beta)$ *sono una terna di funzioni finite e continue, dipendenti dalle funzioni* $X_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$, $Y_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0),\ldots;$ $X_\sigma''(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0),\ldots;$ $X_\sigma'''(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0),\ldots$.

Supposto adunque che le funzioni date $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ soddisfino alla condizione (9) e che $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$ siano le corrispondenti funzioni finite e continue che soddisfano al sistema (6), si considerino le funzioni:

$$(10)\quad \begin{cases} u(x,y,z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma\{X_\sigma'\cdot\varphi(\alpha,\beta)+Y_\sigma'\cdot\psi(\alpha,\beta)+Z_\sigma'\cdot\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Esse soddisfano alle equazioni (1) della (L) e ci dànno, in virtù delle (8) della (L) e delle equazioni (6),

$$\lim_{p'=p_0} u(x,y,z)=-\varphi(\alpha_0,\beta_0)+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\{X_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi(\alpha,\beta)+\cdots\}\,d\sigma=u(\alpha_0,\beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x,y,z)=v(\alpha_0,\beta_0)\quad,\quad \lim_{p'=p_0} w(x,y,z)=w(\alpha_0,\beta_0).$$

Quindi *le funzioni* $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, *date dalle* (10), *rappresentano nel campo* S′ *per* $k>-\frac{2}{3}$ *gli integrali delle equazioni dell'equilibrio, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$.

8. Nel caso in cui le funzioni date $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ non soddisfano alla condizione (9), indicando con r' il segmento variabile, che congiunge un punto fisso p qualsiasi dell'interno di S con i punti (x,y,z) del campo S′ (quelli (α,β) di σ inclusi), e ponendo:

$$u_1(x,y,z)=\frac{1}{r'}-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r'}{\partial x^2}\ ,\ v_1(x,y,z)=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r'}{\partial x\,\partial y}\ ,$$
$$w_1(x,y,z)=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r'}{\partial x\,\partial z}\ ,$$

si può determinare una costante A in modo che si abbia:

$$(11)\quad \int_\sigma \Big[\{u(\alpha,\beta) - A\,.\,u_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1(\alpha,\beta) + \{v(\alpha,\beta) - A\,.\,v_1(\alpha,\beta)\}\{\Psi_1'(\alpha,\beta) + \\ + \{w(\alpha,\beta) - A\,.\,w_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1''(\alpha,\beta)\Big]\,d\sigma = 0\,,$$

a meno che non sia:

$$\int_\sigma \{u_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1(\alpha,\beta) + v_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1'(\alpha,\beta) + w_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1''(\alpha,\beta)\}\,d\sigma = 0\,.$$

Ma in questo caso le funzioni $u_1(x,y,z)$, $v_1(x,y,z)$, $w_1(x,y,z)$, che nei punti del campo infinito S′ soddisfano alle equazioni dell'equilibrio, verificherebbero la condizione (9); e quindi dovrebbero potersi rappresentare per mezzo delle formole (10). Ora è facile vedere che ciò non è possibile; infatti basterà osservare che le funzioni rappresentabili mediante le (10) a distanza infinita divengono infinitesime come $\frac{1}{r'^2}$, mentre p. es. la $u_1(x,y,z)$ a distanza infinita, nei punti del piano normale all'asse delle x passante per p, diventa infinitesima come $\frac{1}{r'}$. Ne concludiamo che *il coefficiente di* A *nella equazione* (11) *è sempre diverso da zero.*

Determinata la costante A per mezzo della (11), e posto:

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{u}(\alpha,\beta) = u(\alpha,\beta) - A\,.\,u_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{v}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta) - A\,.\,v_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{w}(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) - A\,.\,w_1(\alpha,\beta)\,, \end{cases}$$

si considerino le equazioni funzionali:

$$(6)''\quad \begin{cases} -\overline{u}(\alpha_0,\beta_0) = \varphi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X_\sigma'(\alpha,\beta\,;\,\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ -\overline{v}(\alpha_0,\beta_0) = \psi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X_\sigma''(\alpha,\beta\,;\,\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\

si avrà, in virtù delle (6)″, delle (12) e delle formole (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} u(x,y,z) = A \cdot u_1(\alpha_0,\beta_0) - \varphi(\alpha_0,\beta_0) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi(\alpha,\beta)+\cdots\}\,d\sigma = A\cdot u_1(\alpha_0,\beta_0)+\bar{u}(\alpha_0,\beta_0)=u(\alpha_0,\beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x,y,z) = v(\alpha_0,\beta_0) \quad , \quad \lim_{p'=p_0} w(x,y,z) = w(\alpha_0,\beta_0).$$

Dunque *le funzioni* $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, *date dalle formole* (13), *per* $k > -\frac{2}{3}$ *rappresentano nei punti del campo infinito* S′ *gli integrali dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$.

Meccanica. — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatistica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità.* Nota di G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Nota del prof. Marino Pannelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In una precedente Nota [1] ho dimostrato l'esistenza di alcuni invarianti numerici di una varietà algebrica a tre dimensioni; in questa, studio il loro modo di comportarsi rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà [2].

1. Si trasformi dunque birazionalmente la varietà W, supposta immersa in un iperspazio e priva di elementi singolari, in un'altra W′. In W si abbiano σ punti T_h ($h = 1, 2, 3, \ldots \sigma$) e τ curve R_k ($k = 1, 2, 3, \ldots \tau$) fondamentali per la trasformazione. Sia ϱ_k il genere di un curva R_k, λ_{hk} il numero dei suoi rami passanti per T_h ed i_k il suo grado di multiplicità per

[1] *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906.

[2] Le dimostrazioni dei risultati qui esposti sono in alcuni punti forse troppo concise; ciò è dovuto soltanto alla ristrettezza dello spazio concessomi. Così non ho potuto riprodurre gli esempi esaminati per chiarire e confermare i risultati stessi.

una superficie generica del sistema trasformante la varietà W in W'. Riguardo a questi gradi di multiplicità può sempre supporsi che sia

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq i_4 \geq \ldots \geq i_\tau .$$

In fine si indichi con d_k il numero totale dei punti d'appoggio di una curva R_k con tutte le altre curve fondamentali i cui gradi di multiplicità sono inferiori ad i_k; e con δ_k quello dei punti d'appoggio della medesima curva con tutte le successive.

Ad ogni curva fondamentale R_k di W corrisponde in W' una superficie R'_k contenente un fascio, di genere ϱ_k, costituito dalle curve razionali corrispondenti ai punti di R_k. Quindi il genere aritmetico di questa superficie è $-\varrho_k$. Inoltre il fascio anzidetto possiede d_k curve, ciascuna spezzantesi in due, aventi un punto comune, ed oltre queste non contiene nessun'altra curva dotata di un punto doppio. Perciò l'invariante di Castelnuovo-Enriques della medesima superficie R'_k è:

$$-8\varrho_k - d_k + 9 .$$

Ad ogni punto fondamentale T_h di W corrisponde in W' una superficie razionale T'_h, dotata di $\sum_k \lambda_{hk}$ curve eccezionali, corrispondenti ai punti infinitamente vicini a T_h e appartenenti ai rami delle curve R_k passanti per T_h. Quindi il genere aritmetico di questa superficie T'_h è 0, e l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è:

$$10 - \sum_k \lambda_{hk} .$$

Come è noto (1) la formazione degli invarianti numerici della varietà W per mezzo di un sistema $|S|$ di superficie S, è indipendente dalla scelta del sistema medesimo; perciò può supporsi che questo abbia una posizione generale rispetto agli elementi di W, che sono fondamentali per la trasformazione, come accade p. es. per il sistema delle sezioni spaziali. Se si indica con P il genere aritmetico di una superficie S di un sistema siffatto; con p il genere dell'intersezione di due qualsivogliano delle sue superficie: con n il numero dei punti comuni a tre delle superficie medesime; e se inoltre P', p', n' hanno gli analoghi significati rispetto agli enti corrispondenti del sistema $|S'|$ che in W' corrisponde ad $|S|$, si ha:

$$(1) \qquad P' = P \quad , \quad p' = p \quad , \quad n' = n .$$

Una superficie del sistema aggiunto ad $|S'|$ si compone di una superficie S'_a, corrispondente ad una superficie S_a del sistema $|S_a|$ aggiunto ad $|S|$; di

(1) Pannelli, loc. cit.

tutte le superficie R'_k, ciascuna contata una sola volta; e di tutte le superficie T'_h, ciascuna contata due volte (1).
Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è dunque:

$$|S'_a + \sum_k R'_k + 2\sum_h T'_h| . \tag{2}$$

2. Ciò premesso, si vuole in primo luogo dimostrare che Δ è un *invariante assoluto*.

A tale oggetto si ricordi che questo invariante formato per la varietà W, per mezzo del sistema $|S|$, è definito dalla formola:

$$8\Delta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n - 15$$

dove P, p, n hanno i significati già loro attribuiti, ed inoltre P_a ed Ω_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a.

Quindi, se per formare l'invariante analogo Δ' della varietà W' si fa uso del sistema trasformato $|S'|$, si ha:

$$8\Delta' = 8P'_a - \Omega'_a - 8P' + 2p' - n' - 15$$

dove P', p', n' hanno ancora i significati già loro attribuiti, ed inoltre P'_a ed Ω'_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema (2).

Dal confronto delle due formole precedenti, segue subito, tenendo conto delle (1), che l'*invarianza assoluta* di Δ rimane dimostrata, se si prova l'eguaglianza:

$$8P'_a - \Omega'_a = 8P_a - \Omega_a . \tag{3}$$

Ora per calcolare la prima di queste due differenze si applichi la formola (2)

$$8P - \Omega = 8\sum P_i - \sum \Omega_i + 2\sum (F_i F_j F_l) + \sum (F_i F_i F_j) + 9(\nu - 1) \tag{4}$$

relativa alla somma di ν superficie F.

Nel caso attuale in cui questa somma è quella che costituisce una superficie del sistema (2), si ha dapprima:

$$\nu = 2\sigma + \tau + 1$$

epperò:

$$9(\nu - 1) = 18\sigma + 9\tau . \tag{5}$$

(1) Questa proprietà si dimostra come l'analoga sulle superficie; Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria* ecc. n. 21. Atti dell'Acc. di Torino, vol. XXXVII.

(2) Pannelli, loc. cit., n. 1.

Inoltre:

a) Il genere aritmetico di una superficie S'_a è eguale a quello P_a della superficie corrispondente S_a; di più (n. 1) il genere aritmetico di una superficie R'_k è $-\varrho_k$, e quello di una T'_h è 0. Quindi:

$$\sum P_i = P_a - \sum_k \varrho_k . \tag{6}$$

b) Una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, mentre incontra ogni curva R_k in α_k punti. Quindi la superficie corrispondente S'_a possiede $\sum_k \alpha_k$ curve eccezionali. Perciò, siccome si è già indicato con Ω_a l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a, così quello della superficie S'_a è:

$$\Omega_a - \sum_k \alpha_k .$$

Gli invarianti analoghi delle superficie R'_k e T'_h sono già stati determinati (n. 1). Si ha dunque:

$$\sum \Omega_i = \Omega_a - \sum_k \alpha_k - 8\sum_k \varrho_k - \sum_k d_k + 9\tau + 20\sigma - 2\sum_{hk} \lambda_{hk} . \tag{7}$$

c) Si ha poi:

$$\begin{aligned}\sum (F_i F_j F_l) = {} & \sum (S'_a R'_k R'_{k'}) + 2\sum (S'_a T'_h T'_{h'}) + \sum (S'_a T'_h T'_h) + 2\sum (S'_a R'_k T'_h) \\ & + \sum (R'_k R'_{k'} R'_{k''}) + 2\sum (R'_k R'_{k'} T'_h) + 2\sum (R'_k T'_h T'_{h'}) + \sum (R'_k T'_h T'_h) \\ & + 2\sum (T'_h T'_{h'} T'_{h''}) + 2\sum (T'_h T'_h T'_{h'})\end{aligned}$$

dove gli indici k, k', k'' e h, h', h'' debbono variare da 1 sino a τ, o a σ, rispettivamente; ma nello stesso termine non possono prendere valori eguali.

Ora, una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, nè per nessuno dei punti comuni a due curve R_k; perciò si ha intanto:

$$\sum (S'_a R'_k R'_{k'}) = \sum (S'_a T'_h T'_{h'}) = \sum (S'_a T'_h T'_h) = \sum (S'_a R'_k T'_h) = 0 .$$

Tre curve fondamentali R_k non hanno in generale punti comuni, e così due di esse non hanno punti comuni infinitamente vicini ad uno stesso punto fondamentale T_h; quindi in tale ipotesi, si ha ancora:

$$\sum (R'_k R'_{k'} R'_{k''}) = \sum (R'_k R'_{k'} T'_h) = 0 \ (^1).$$

(1) Non è difficile vedere come si modificano queste e le altre formole, se l'ipotesi ora fatta non è verificata; ma le modificazioni, che si debbono introdurre, non alterano il risultato finale.

Le superficie corrispondenti a due punti fondamentali non si tagliano in linee variabili; epperò:

$$\sum(R'_k T'_h T'_{h'}) = \sum(T'_h T'_{h'} T'_{h''}) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0 .$$

Infine, una curva R_k ha λ_{hk} punti infinitamente vicini a T_h; e per conseguenza la superficie R'_k ha in comune con la superficie T'_h altrettante curve razionali, eccezionali tanto per l'una quanto per l'altra superficie. Considerate come appartenenti ad R'_k, il grado d'intersezione di ciascuna di esse con sè stessa è 0, e conseguentemente:

$$\sum(R'_k T'_h T'_h) = 0 .$$

Si ha dunque:

$$\sum(F_i F_j F_l) = 0 . \tag{8}$$

d) Infine è:

$$\sum(F_i F_i F_j) = \sum(S'_a S'_a R'_k) + 2\sum(S'_a S'_a T'_h) + \sum(R'_k R'_k S'_a)$$

$$+ \sum(R'_k R'_k R'_k) + 2\sum(R'_k R'_k T'_h)$$

$$+ 2\Big[\sum(T'_h T'_h S'_a) + \sum(T'_h T'_h R'_k) + \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) + \sum(T'_h T'_h T'_h)\Big] .$$

Ora, una curva generica $(S_a S_a)$ non si appoggia alle curve R_k, nè passa per i punti T_h; perciò si ha intanto:

$$\sum(S'_a S'_a R'_k) = \sum(S'_a S'_a T'_h) = 0 .$$

Agli α_k punti d'intersezione di una superficie S_a con una curva R_k corrispondono sulla superficie S'_a altrettante curve eccezionali, e il grado d'intersezione di ciascuna con sè stessa è -1. Quindi si ha ancora:

$$\sum(R'_k R'_k S'_a) = -\sum_k \alpha_k .$$

Ogni curva R_k viene incontrata in d_k punti complessivamente dalle curve $R_{k'}$, i cui gradi di multiplicità per le superficie del sistema trasformante la varietà W in W′ sono inferiori ad i_k. A ciascuno di questi punti corrisponde una curva composta da altre due, aventi un punto comune, una delle quali appartiene alle due superficie R'_k ed $R'_{k'}$. Il grado d'intersezione di questa componente con sè stessa, considerata sulla superficie R'_k, è -1, mentre, considerata sulla superficie $R'_{k'}$, è 0. Per conseguenza si trova:

$$\sum(R'_k R'_k R'_{k'}) = -\sum_k d_k .$$

In modo analogo, osservando che una superficie T'_h ha in comune λ_{hk} curve eccezionali con una superficie R'_k, si ottiene:

$$\sum(R'_k R'_k T'_h) = -\sum_{hk} \lambda_{hk}.$$

Inoltre, si è già trovato precedentemente (c):

$$\sum(T'_h T'_h S'_a) = \sum(T'_h T'_h R'_k) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0.$$

Le superficie S_1 del sistema $|S|$ passanti per un medesimo punto T_h formano un sistema $|S_1|$, contenuto in $|S|$, del grado $n-1$, cui corrisponde in W' un sistema costituito da superficie, ciascuna delle quali è la somma della superficie T'_h con una superficie S'_1 di un determinato sistema $|S'_1|$ del medesimo grado $n-1$ di $|S|$. Tre superficie $S'_1 + T'_h$ si debbono incontrare in n punti; epperò si ha l'eguaglianza:

$$(9) \qquad (S'_1 S'_1 S'_1) + 3(S'_1 S'_1 T'_h) + 3(S'_1 T'_h T'_h) + (T'_h T'_h T'_h) = n$$

nella quale, in virtù del grado del sistema $|S'_1|$, è intanto:

$$(S'_1 S'_1 S'_1) = n - 1.$$

Inoltre, poichè la curva $(S_1 S_1)$ ha un sol punto infinitamente vicino a T_h, si ha ancora:

$$(S'_1 S'_1 T'_h) = 1.$$

Infine, a T_h, che è un punto fondamentale per una superficie S_1, corrisponde sopra S'_1 una curva eccezionale, il cui grado d'intersezione con sè stessa è -1; quindi:

$$(S'_1 T'_h T'_h) = -1.$$

Con ciò l'eguaglianza (9) somministra

$$(T'_h T'_h T'_h) = 1$$

epperò si ha infine:

$$\sum(T'_h T'_h T'_h) = \sigma.$$

Dunque:

$$(10) \qquad \sum(F_i F_i F_j) = -\sum_k \alpha_k - \sum_k d_k - 2\sum_{hk} \lambda_{hk} + 2\sigma.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formola (4), quando essa si applichi per calcolare la differenza $8P'_a - \Omega'_a$, valori dati dalle (5), (6), (7), (8) e (10). Facendo le sostituzioni si trova che la formola

stessa (4) si riduce alla eguaglianza (3), la quale così rimane dimostrata, e quindi, come si è osservato in principio, si può concludere:

L'invariante Δ è un invariante assoluto.

3. Si passi ora a studiare il modo di comportarsi degli altri invarianti, rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà.

Si ricordi dapprima, che fra Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ hanno luogo le relazioni [1]:

$$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Delta^{(2)} - 25 \quad \Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)}.$$

Se $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_1^{(3)}$ sono gli stessi invarianti per la varietà trasformata W', essendo Δ un invariante assoluto (n. 2), si ha analogamente:

$$8(\Delta_1^{(1)} - \Delta) = \Delta_1^{(2)} - 25 \quad , \quad \Delta_1^{(2)} - 1 = 4\Delta_1^{(3)}.$$

Da queste relazioni e dalle precedenti segue:

$$2(\Delta_1^{(1)} - \Delta^{(1)}) = \Delta_1^{(3)} - \Delta^{(3)}. \tag{11}$$

Ciò premesso, conviene anzitutto esaminare l'invariante $\Delta^{(3)}$ definito dalla formola [2]:

$$\Delta^{(3)} = n_a - 3\Omega + 6p - 4n - 3 \tag{12}$$

dove Ω è l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema $|S|$, p ed n hanno i significati già loro attribuiti ed n_a è il grado del sistema aggiunto $|S_a|$.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si cerchi l'espressione dell'invariante analogo $\Delta_1^{(3)}$, per la varietà W', dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un sol punto fondamentale T.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a + 2T'|$, il cui grado è:

$$(S'_a S'_a S'_a) + 6(S'_a S'_a T') + 12(S'_a T' T') + 8(T' T' T')$$

ossia:

$$n_a + 8$$

perchè il grado $(S'_a S'_a S'_a)$ del sistema $|S'_a|$ è eguale a quello, n_a, di $|S_a|$, e di più (n. 2, *c*) e *d*)) si ha:

$$(S'_a S'_a T') = (S'_a T' T') = 0 \quad , \quad (T' T' T') = 1.$$

Inoltre, l'invariante Ω' di Castelnuovo-Enriques di una superficie S' è eguale a quello Ω di S, poichè, per le ipotesi fatte, sopra la superficie S' non si hanno curve eccezionali. Quindi, tenendo presenti le relazioni (1) si trova:

$$\Delta_1^{(3)} = n_a + 8 - 3\Omega + 6p - 4n - 3$$

(1) Pannelli, loc. cit., n. 4 e 5.

(2) Pannelli, loc. cit., n. 5.

donde, per la (12), segue:

$$\Delta_1^{(3)} = \Delta^{(3)} + 8$$

epperò:

1°) In virtù della particolare trasformazione birazionale considerata l'invariante $\Delta^{(3)}$ di W aumenta di 8 unità.

Dalla relazione precedente e dalla (11) si deduce:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4,$$

e quindi si ha ancora:

2°) In virtù della medesima trasformazione, l'invariante $\Delta^{(1)}$ di W aumenta di 4 unità.

L'invariante $\Delta^{(1)}$ di W è definito dalla formola ([1]):

$$\Delta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3 \tag{13}$$

dove P_a è il genere aritmetico di una superficie S_a, e gli altri simboli hanno significati già stabiliti.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si calcoli l'invariante $\Delta_1^{(1)}$ della varietà W', dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un numero σ di punti fondamentali T_h.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a + 2\sum_h T'_h|$, e il genere aritmetico di una sua superficie è ([2]):

$$P_a + X \tag{14}$$

dove per lo scopo che qui si ha in mira, è inutile scrivere esplicitamente i termini contenuti in X.

Come nel caso precedente, è $\Omega' = \Omega$. Quindi tenendo presenti le relazioni (1), si trova:

$$\Delta_1^{(1)} = P_a + X - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

donde, per la (13), segue:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + X.$$

D'altra parte, per la proprietà 2°), si ha:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4\sigma,$$

Dal confronto di questa eguaglianza con la precedente, si deduce:

$$X = 4\sigma$$

e quindi, in virtù della (14), si conclude:

3°) Il genere aritmetico di una superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ è $P_a + 4\sigma$.

([1]) Pannelli, loc. cit., n. 4.

([2]) Pannelli, loc. cit., n. 1.

4. Ciò stabilito, si consideri la trasformazione generale della varietà W in un'altra W′, definita nel n. 1, e in questa ipotesi si calcoli l'invariante $\Delta_1^{(1)}$ di W′, per mezzo del sistema $|S'|$.

Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è il sistema (2), e il genere aritmetico di una sua superficie è eguale alla somma dei generi aritmetici delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$, aumentata del genere della intersezione delle superficie medesime.

a) Il modo di comportarsi delle superficie T'_h fra loro e rispetto alla superficie S'_a è indipendente dalla esistenza in W delle curve R_k, queste curve non avendo altro effetto, quando passano per i punti T_h, come qui si suppone, che di introdurre sulle superficie T'_h delle curve eccezionali, le quali non influiscono sul genere aritmetico della superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$. Quindi (n. 3, 3°)) questo genere aritmetico è $P_a + 4\sigma$.

b) Con un procedimento di ripetizione, si trova che il genere aritmetico della superficie $\sum_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k + \sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k , R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau).$$

E poichè una curva R_k si appoggia complessivamente in δ_k punti a tutte le curve successive (n. 1), si ha:

$$g(R'_k , R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\delta_k + 1$$

donde:

$$\sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k , R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\sum \delta_k + \tau - 1 .$$

Quindi il genere aritmetico della superficie $\sum_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k - \sum_k \delta_k + \tau - 1 = -\varrho ,$$

indicando con ϱ il genere della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k.

c) L'intersezione delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$ si compone di $\tau + 2\sigma\tau$ curve, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il suo genere è:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) + 2\sum_{hk} g(T'_h R'_k) - \tau - 2\sigma\tau + 1 .$$

Ora, poichè una curva R_k incontra una superficie S_a in α_k punti, si ha:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) = -\sum_k \alpha_k + \tau .$$

Inoltre, siccome una curva R_k possiede in ogni T_h un punto multiplo secondo λ_{hk}, così si ha ancora:

$$\sum_{hk} g(T'_h R'_k) = -\sum_{hk} \lambda_{hk} + \sigma\tau = -\lambda + \sigma\tau$$

ove si chiami λ il numero totale dei rami delle curve R_k passanti per i punti T_h.

Così per il genere dell'intersezione delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$ si trova:

$$-\sum_k \alpha_k - 2\lambda + 1.$$

Quindi, per quanto si è osservato in principio, il genere aritmetico di una superficie del sistema (2), è:

$$P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1.$$

Se si dice β_k il numero delle intersezioni di una superficie S con una curva R_k, l'invariante di Castelnuovo-Enriques della superficie corrispondente S' è:

$$\Omega - \sum_k \beta_k.$$

Infine, i valori di P', p', n' sono dati dalle formole (1).

Così si hanno tutti gli elementi necessari per calcolare l'invariante $\Delta_1^{(1)}$, definito dalla formola (13) applicata al sistema $|S'|$ della varietà W'; quindi si trova:

$$\Delta_1^{(1)} = P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1 - P - \Omega + \sum_k \beta_k + 3p - 2n - 3$$

donde, tenendo presente la stessa formola (13) ed osservando che l'espressione:

$$\sum_k \alpha_k - \sum_k \beta_k$$

è il carattere d'immersione θ della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k (1), segue:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1).$$

(1) In virtù della proprietà fondamentale delle superficie aggiunte (Pannelli, loc. cit., n. 1, teor. IV), si ha:

$$|S_a - S| = |S'_a - S'|$$

donde, indicando con K una curva qualunque (semplice o composta) della varietà W segue

$$(KS_a) - (KS) = (KS'_a) - (KS')$$

il che dimostra che il numero

$$(KS_a) - (KS)$$

non dipende dalla scelta del sistema $|S|$, ma solo dalla curva K in quanto è data nella varietà W. Questo numero chiamasi *carattere d'immersione* della curva K nella varietà W.

Dunque:

Se la varietà W *si trasforma birazionalmente nella varietà* W', *l'invariante* $\Delta^{(1)}$ *di* W *aumenta del numero:*

$$[4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1)] - [4\sigma' - (\varrho' + \theta' + 2\lambda' - 1)]$$

dove σ *è il numero dei punti,* ϱ *il genere e* θ *il carattere d'immersione della curva composta dalle curve, che insieme a quei punti costituiscono in* W *gli elementi fondamentali della trasformazione e* λ *è il numero totale dei rami di queste curve passanti per i punti medesimi. Inoltre* σ', ϱ', θ' *e* λ' *hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di* W', *che sono semplici per questa varietà.*

Per mezzo delle relazioni che legano $\Delta^{(1)}$ agli altri invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$ è facile, volendo, trovare le modificazioni che subiscono questi stessi invarianti nelle trasformazioni birazionali della varietà.

Matematica. — *Sur les fonctions dérivées.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Fisica. — *Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo.* Nota di Alessandro Artom, presentata dal Corrispondente G. Grassi.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane.* Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio* (1). Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

La posizione del tellurio nel gruppo sesto del sistema periodico, mentre è resa ragionevole dalle spiccate analogie di questo elemento con lo zolfo ed il selenio, è ostacolata dai caratteri principali che determinarono la posizione degli elementi nel sistema, il peso atomico e le relazioni di isomorfismo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Padova.

Per ciò che si riferisce al peso atomico, noi abbiamo una serie di determinazioni concordanti nel valore di 127,6: valore troppo elevato in confronto a quello dello iodio che si trova nella stessa serie eterologa nel gruppo settimo. La differenza è piccola, e tanto più piccola dopo le ultime ricerche sul peso atomico dello iodio: per cui non è improbabile che si possa abbassare il valore spettante al tellurio, con lo studio più accurato dei suoi composti ed in special modo con il perfezionamento dei metodi analitici. Del resto, anche col peso atomico attuale, l'Ostwald (1) ed il Seubert (2) ritengono che non vi sia sufficiente ragione di separare un elemento dai suoi omologhi per piccole variazioni nel suo peso atomico, in modo analogo ai casi nichel-cobalto e argo-potassio: ed a maggior ragione quando un altro carattere peculiare per la determinazione del posto degli elementi nella classificazione, come l'isomorfismo, venga ad essere posto in tutta la sua evidenza anche per il tellurio: le ricerche sul peso atomico acquisterebbero una nuova e maggiore importanza.

Ora la questione dell'isomorfismo è rimasta pressochè insoluta, avendo gli studî compiuti in tale argomento portato un contributo troppo piccolo e troppo incerto.

Nella serie degli elementi isomorfogeni, il tellurio viene collocato tanto coi metalli del platino, quanto con lo zolfo ed il selenio (3). Per la prima serie stanno le argomentazioni del Retgers (4) fondate principalmente sulla somiglianza cristallina dell'osmiato potassico col tellurato potassico da una parte, e dall'altra sulla mancanza di somiglianza cristallina dei tellurati coi ferrati, manganati, solfati e seleniati. Inoltre il tellurio è come molti metalli della serie del platino esagonale-romboedrico: ed infine si hanno composti del tipo $R^{I}_{2}R^{IV}Cl_6$ che cristallizzano in ottaedri regolari, dove R^{IV} è Te, Pt, Sn, Si, ecc.

Invece la posizione del tellurio nella serie isomorfogena dello zolfo è sostenuta dal Muthmann (5) per l'isomorfismo del tellurio con la modificazione metallica del selenio (sistema esagonale), e l'isomorfismo del bromuro di selenio e potassio ed il cloruro di tellurio e potassio. Recentemente poi Norris e Mommers (6) hanno riscontrato l'isomorfismo fra cloruri e bromuri doppî di selenio e tellurio con la dimetilammina, mentre il composto analogo del platino non è isomorfo con quelli.

(1) Grundlinien der anorg. Chemie.

(2) Zeit. für anorg. Chemie, *33*. 246.

(3) A. Arzruni, *Die Beziehungen zwischen Krystallform und chem. Zusammensetzung*, pagg. 106 e 110; Graham-Otto, I Band.

(4) Zeit. für anorg. Chemie, *12*. 98.

(5) Zeit. Kryst., *17*. 357; Berichte, *26*. 1008.

(6) American chem. Journ., *23*. 486.

È evidente che le relazioni di isomorfismo fra selenio e tellurio sono assai poco spiccate, ed assai meno furono trovate con lo zolfo. Nè sarebbe ragionevole ritenere probabile una stretta analogia del tellurio coi suoi omologhi dato il suo peso atomico elevato: col crescere del peso atomico le relazioni di isomorfismo si fanno, per regola generale, meno spiccate; e ciò in accordo colla variazione dei caratteri chimici e fisici che sono tanto diversi fra selenio e tellurio ed ancor più fra tellurio e zolfo.

Per cui lo studio di Norris e Mommers sui cloruri e bromuri doppî di selenio e tellurio con la dimetilammina, ci rappresenta finora la prova più attendibile delle relazioni di isomorfismo del tellurio col selenio: benchè si tratti di composti isomorfogeni molto complessi, dove i caratteri individuali degli elementi sono mascherati dai gruppi che vi sono uniti; e benchè i citati autori si siano limitati ad osservare sotto il campo del microscopio la formazione di cristalli misti col metodo di Retgers, basato sulla colorazione assunta da cristalli di miscela fra componente colorato e componente incoloro: per cui non si può stabilire se si tratta di vero isomorfismo o di isodimorfismo. Notevole poi il fatto della mancanza di miscibilità col composto corrispondente del platino.

Una maggior somma di dati stanno invece a provare la mancanza di isomorfismo fra solfo, selenio e tellurio. Finora non si è avuto un solo caso di isomorfismo fra solfati o seleniati coi tellurati. Lo studio deve essere limitato ai tellurati alcalini, gli unici solubili nell'acqua. Essi differenziano dai solfati e seleniati per la loro scarsa solubilità, per la forma cristallina e per il contenuto in acqua di cristallizzazione. Lo studio sui tellurati è ancora incompleto specie per ciò che riguarda i tellurati di ammonio e di litio, e non è perciò esclusa la possibilità di rinvenire una forma la quale stia in relazione isomorfa coi seleniati e solfati. Finora gli studî del Retgers [1] dello Staudenmayer [2], del Norris [3] diedero risultati negativi.

Il Retgers si è servito del metodo microscopico, ed ha dimostrato come il manganato potassico ed il ferrato potassico diano miscela isomorfa coi solfati, seleniati, cromati, volframati, molibdati, mentre ciò non avviene col tellurato potassico. Alle prove negative del Retgers si aggiungono quelle dello Staudenmayer, il quale ritenendo che il metodo del Retgers non possa prestarsi ad una affermazione decisiva, ha istituito una serie di esperienze in grande. Però facendo cristallizzare alla temperatura ambiente soluzioni di solfato-cromato-molibdato-volframato potassico con aggiunta di tellurato potassico, non ha ottenuto nessuna formazione di cristalli misti. Così pure Norris e Kingmann, ritenendo che il piccolo contenuto in acqua di cristal-

(1) Zeit. für phys. Chemie, *8.* 70; *10.* 529.
(2) Zeit. für anorg. Chemie, *10.* 217.
(3) American chem. Journal, *26.* 318.

lizzazione del tellurato acido di rubidio ($RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$) non costituisce un ostacolo rilevante alla possibile formazione di cristalli misti col seleniato acido di rubidio ($RbHSeO_4$) hanno sottoposto a lenta cristallizzazione alla temperatura ordinaria quantità equimolecolari dei due sali senza poter stabilire in modo decisivo una qualsiasi relazione di isomorfismo. Le prove dei citati autori non ci rendono però conto della incapacità assoluta dei tellurati a dare miscele isomorfe coi solfati, seleniati, ecc., poichè non furono provate tutte quelle condizioni fisiche che permettono l'esplicazione dell'isomorfismo nei casi in cui la posizione degli elementi nel sistema periodico lo renda assai meno evidente e più difficile ad ottenersi.

Il Retgers (1) sempre col metodo microscopico riscontrò isomorfismo fra l'osmiato potassico ed il tellurato potassico. E specialmente per questo fatto a cui aggiunge la grandezza del peso atomico e la mancanza di isomorfismo nelle forme tipiche del gruppo sesto, si ritiene autorizzato a collocare il tellurio nell'ottavo gruppo col rutenio e l'osmio. Si noti che il tellurato potassico cristallizza comunemente con cinque molecole di acqua e solo in condizioni speciali con due molecole. Ed è precisamente quest'ultima forma ($K_2TeO_4 + 2H_2O$) che si mostra isomorfa coll'osmiato potassico ($K_2OsO_4 + 2H_2O$). Il sistema periodico ci insegna come l'identità della forma di combinazione sia accompagnata da relazioni di isomorfismo; ciò che si verifica per elementi i quali hanno una posizione ben determinata e diversa nella classificazione. E qui appunto si tratta di uno di questi casi, causato dall'uguale contenuto di acqua di cristallizzazione. Del resto perchè il rutenato potassico ($K_2RuO_4 + H_2O$) esperimentato dal Retgers (2) non è isomorfo con l'osmiato corrispondente? Eppure rutenio ed osmio stanno fra loro in serie omologa. Questa mancanza deve attribuirsi al contenuto diverso in acqua di cristallizzazione dei due sali, da cui dipende anche la mancanza di isomorfismo dei rutenati coi solfati e seleniati. Invece la constatazione di isomorfia fra solfati e seleniati coi tellurati avrebbe ben altra importanza: poichè malgrado l'osservazione che l'isomorfismo si possa attribuire alla stessa forma di combinazione è però in questo caso la forma più elevata e limite del gruppo sesto.

In favore dell'isomorfismo del tellurio con lo zolfo ed il selenio stanno le ricerche del Muthmann.

I doppî alogenati del tellurio e selenio col potassio e l'ammonio cristallizzano in ottaedri regolari (3): ma questo fatto non può avere grande importanza, poichè sali doppî regolari della stessa composizione li danno anche elementi com silicio, piombo, stagno, platino che non sono isomorfi fra loro (4).

(1) Zeit. für phys. Chemie, *10*. 533.
(2) Zeit. für phys. Chemie, *10*. 538.
(3) Berichte chem. Gesell., *26*. 1008.
(4) Retgers, Zeit. für phys. Chemie, *12*. 595.

Il Muthmann (1) si fonda anche sulla riscontrata isomorfia del tellurio con la modificazione romboedrica del selenio, ma secondo il Retgers (2) ciò non è una prova convincente di isomorfismo, poichè la maggior parte degli elementi cristallizzano monometrici od esagonali e possono cristallizzare inoltre in romboedri prossimi al cubo come è il caso del selenio e tellurio. Il Muthmann cita inoltre come esempio di isomorfia fra selenio e tellurio il rinvenimento frequente in natura di tellurio elementare mescolato a selenio, come nei cristalli di tellurio di Faczebaya che contengono 5,8 % di selenio corrispondenti cristallograficamente a quelli di selenio da lui studiati, e come nei cristalli di tellurio dell'Honduras contenenti il 29,31 % di selenio.

Il Retgers però afferma che a causa della mancanza di trasparenza dei cristalli, la prova chimica non è indizio sufficiente di miscuglio isomorfo e potrebbe anche trattarsi di semplici miscugli meccanici: occorrerebbe dimostrare che le proprietà fisiche (prove di corrosione) sono una funzione della variazione di composizione chimica. Le ricerche da lui istituite sulla formazione di cristalli misti di zolfo e tellurio depositantesi dalla soluzione unica dei due elementi nel ioduro di metilene, hanno dato risultati negativi (3). Entrambi gli elementi cristallizzano separati. Però riguardo a queste prove di solubilità nel ioduro di metilene anche le conclusioni del Retgers sono errate, perchè tanto il Muthmann (4) quanto recentemente il Gutbier (5) hanno dimostrato che la solubilità del tellurio nel ioduro di metilene dipende per lo meno in massima parte da una combinazione chimica fra iodio e tellurio, e non può avere che pochissima importanza nella ricerca dell'isomorfismo data la piccolissima solubilità (gr. 0,1 di tellurio in 100 gr. di ioduro di metilene).

Infine si vorrebbe riconoscere una relazione di isomorfismo fra tellurio, selenio e zolfo dal fatto che i tellururi, seleniuri, solfuri di piombo (6) ed argento (Ag_2 Te-Pb Te-Ag_2Se-Pb Se-Ag_2S-Pb S) cristallizzano tutti regolari: ma in causa della troppa semplicità della forma di combinazione è anche naturale che essi si presentino in forme semplici monometriche: potrebbe trattarsi di puro isogonismo per il fatto che sono monometrici: delle esperienze di corrosione su questi cristalli porterebbero certamente una maggior luce in proposito. Tuttavia il trovarsi questi minerali spesso mescolati ha un certo valore e ci rammenta una analogia di formazione.

Gli studî sulla tetradimite (Bi_2Te_3) costituiscono un argomento in favore dell'isomorfismo fra tellurio e solfo. Il Groth (7) pone in serie isomorfa

(1) Zeit. Kryst., *17.* 357.
(2) Zeit. für phys. Chemie, *9.* 399; Zeit. für anorg. Chemie, *12.* 103.
(3) Zeit. für phys. Chemie, *12.* 593.
(4) Zeit. für anorg. Chem. *10.* 218.
(5) Zeit. für anorg. Chemie, *32.* 42.
(6) Zeit. für phys. Chemie, *14.* pag. 17 e *16.* 654.
(7) *Tabellar. Uebersicht der Mineralien,* 1889, pagg. 14-16.

l'arsenico, l'antimonio, il bismuto, il tellurio, la tetradimite che cristallizzano in romboedri simili al cubo. Egli ritiene che la tetradimite sia un miscuglio isomorfo di bismuto e tellurio piuttosto che una combinazione chimica avente relazione isomorfa con i solfuri di arsenico, antimonio, bismuto. Il Retgers (1) combatte queste opinioni: perchè bismuto e tellurio si comportano chimicamente in modo diverso: perchè l'analisi delle tetradimiti più pure ci dimostra la presenza degli elementi in rapporti stechiometrici definiti: perchè pur avendo il composto Bi_2Te_3 lo stesso sistema cristallino del tellurio e bismuto ne diversifica notevolmente per i rapporti assiali. Ritiene poi dubbio l'aggruppamento delle tetradimiti col gruppo As_2S_3, Sb_2S_3, Bi_2S_3 a causa della semplice forma cristallina che spesso si verifica in natura, senza che altri criterî fisici abbiano ad avvalorare l'ipotesi di una isomorfia. Per la tetradimite sembra oramai fuori di dubbio che si tratti di un vero composto, come lo comprova anche lo studio recente chimico fisico del Mönkemeyer (2). Notevoli sono le analisi di Muthmann e Schoder (3) su alcune tetradimiti le quali dimostrano come lo solfo si possa sostituire in rapporti variabili al tellurio senza variazioni nell'abito cristallino: il che parla in favore di una spiccata relazione di isomorfismo dei due elementi.

Nell'affrontare l'intricato e complesso problema, io mi sono proposto lo studio delle più svariate forme di combinazioni del selenio e tellurio per mettere in evidenza qualunque analogia possibile fra loro. I metodi di ricerca seguiti per la prima volta in questo studio, sono fondati sulla applicazione della regola delle fasi, come quella che ha la maggior probabilità di condurci a risultati esaurienti e decisivi.

Parte sperimentale.

Solubilità di cristalli misti di bromotellururo di fenile e bromoseleniuro di fenile.

Uno studio cristallografico su queste due sostanze preparate per la prima volta da Kraft e Lions (4) venne fatto dal dott. Billows (5) dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Padova. Da esso risulta che il dibromotellururo di fenile $[(C_6H_5)_2TeBr_2]$ è dimorfo: dal solfuro di carbonio cristallizza nel sistema dimetrico, dal benzolo cristallizza nel sistema triclino: i cristalli di color giallo-solfo si mantengono inalterati e lucenti all'aria se ottenuti dal solfuro di carbonio; si alterano nella massa e divengono opachi all'aria se

(1) Zeit. für phys. Chemie, *16*. 610 e Zeit. für anorg. *12*. 103.
(2) Zeit. für anorg. Chemie, *46*. 415.
(3) Zeit. für Kryst. *17*.
(4) Ber. chem. Gesell., *27* 1768.
(5) Rivista di mineralogia e cristallografia italiana, vol. *28*., pag. 33.

ottenuti dal benzolo. Invece il dibromoseleniuro di fenile $[(C_6H_5)_2SeBr_2]$ tanto dal solfuro di carbonio come dal benzolo si presenta in forme del sistema trimetrico. Gli individui cristallini sono rossi e si mantengono lucenti all'aria. Sembrerebbe perciò che anche in composti complessi selenio e tellurio non fossero isomorfogeni: ma diverse prove preliminari di formazione di cristalli misti hanno dimostrato come si possano ottenere cristalli a colorazione intermedia fra quella del composto del tellurio (giallo) e quella del composto del selenio (rosso): cristalli i quali all'analisi risultano contenere entrambi gli elementi.

Ho perciò studiato la curva completa di solubilità dei cristalli misti dei due composti nel benzolo.

Le soluzioni sature a freddo dei rispettivi composti vennero mescolate fra loro in differenti rapporti e poscia lasciate evaporare spontaneamente a temperatura costante di 21° gradi in un termostato. Le soluzioni erano poste in bevute a collo stretto chiuse con un tampone di ovatta leggermente compresso per impedire una evaporazione troppo rapida del solvente. Il tutto veniva agitato frequentemente. Dopo parecchi giorni venne determinato il rapporto dei componenti su parte delle soluzioni: i cristalli depostisi in piccola quantità vennero separati, lavati dapprima con un po' di benzolo, poi con alcool, etere, asciugati ed analizzati.

Il metodo di analisi era il seguente: i cristalli della fase solida e quelli ottenuti per evaporazione della soluzione venivano ossidati con acido nitrico in tubo chiuso. Il prodotto di ossidazione era ripreso parecchie volte a bagnomaria con acido cloridrico (con aggiunta di cloruro sodico per impedire perdite di cloruro di selenio) fino a che cessato lo sviluppo di cloro, l'acido selenico e tellurico fossero ridotti ad acido selenioso e telluroso. Poscia, dalla soluzione acquosa cloridrica si separava il selenio con solfato di idrazina in presenza di tartrato acido di ammonio ([1]): nel liquido filtrato si precipitava il tellurio allo stato di solfuro con corrente di H_2S: il solfuro insieme al filtro su cui veniva raccolto si trattava con acido nitrico fumante: scacciato l'acido nitrico si riprendeva con 10 cm^3 di acido solforico concentrato a caldo fino a scomparsa della colorazione rossa dipendente da formazione di ossisolfuro di tellurio $TeSO_3$. Si aggiungevano poi circa 250 cm^3 di soluzione satura a freddo di tartrato acido ammonico, e da questo bagno il tellurio veniva deposto elettroliticamente con l'impiego del catodo rotante ([2]). Il mio metodo di analisi fornisce risultati esattissimi.

Dalle quantità di tellurio e selenio ottenute, si risaliva alla quantità dei singoli composti organici nei cristalli misti e nella soluzione.

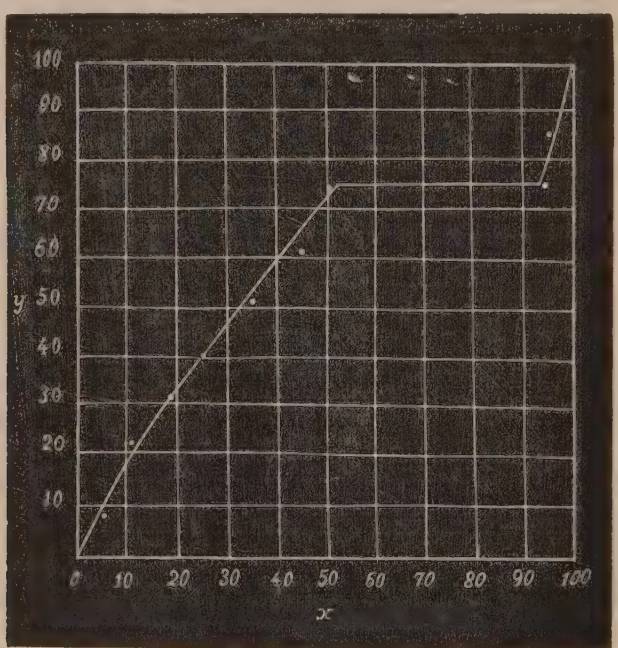
([1]) Pellini, *Separazione del selenio dal tellurio.* Gazz. chim. italiana, 1905, a. 514.

([2]) Pellini, *Determinazione quantitativa del tellurio per elettrolisi.* Gazz. chim. ital., 1903, a. 515.

Nella tabella che segue sono riportati i risultati.

Numero delle esperienze	1 litro di soluzione contiene: gr. (C_6H_5) Te Br_2	gr. $(C_6H_5)_2$ Se Br_2	milligramm-molecole $(C_6H_5)_2$ $TeBr_2$ c_1	(C_6H_5) Se Br_2 c_2	$c_1 + c_2$	$y = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$	Molecole % $(C_6H_5)_2$ Se Br_2 nei cristalli misti x
1	18.614	—	42.15	—	42.15	0	0
2	17.400	1.448	39.40	3.65	43.05	8.47	4.91
3	16.152	4.172	36.57	10 61	47.18	22.48	10.51
4	15.030	6.210	34.04	15.80	49.84	31.70	18.21
5	13.320	8.148	30.16	20.72	50.88	40.72	24.98
6	11.940	11 420	27.03	29.05	56.08	51.80	34.94
7	10.224	14.608	23.15	37.16	60.31	61.61	44.89
8	7.544	19.876	17.08	50.56	67.64	74.74	51.18
9	6.780	18.984	15.35	48.29	63.64	75.87	94 25
10	3.184	17.392	7.25	44.24	51.45	85 98	95.82
11	—	18.984	—	48.29	48.29	100	100

Mediante i dati di questa tabella esprimendo graficamente i rapporti fra x e y si ottiene la figura qui disegnata:



La figura è completamente analoga a quella data dal tipo 4° di Roozeboom (1).

(1) Zeit. für phys. Chemie, *8*. 525.

La serie di cristalli misti presenta una lacuna fra 51,18 — ± 94,25. La soluzione, la quale dà luogo ai cristalli misti limite, contiene più composto selenico che composto tellurico ed ha il valore di 75,3 %.

La prima specie di cristalli misti (0-51,18 % di composto selenico) appartiene al sistema triclino, cioè al tipo del tellurio-composto: la seconda serie di cristalli misti assai più limitata (94,25-100 %) appartiene al sistema trimetrico, cioè al tipo del selenio-composto.

Si è dunque, nelle condizioni di temperatura da me sperimentata, in presenza di un caso assai netto di isodimorfismo.

In composti complessi il tellurio è isodimorfo col selenio.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio.* Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra selenio e tellurio.* Nota dei dott. Giovanni Pellini e Giovanni Vio, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle reazioni di doppia decomposizione fra alcooli ed eteri composti.* Nota di G. Bruni e A. Contardi, presentata dal Socio G. Körner.

Il fatto che quando sopra un etere composto si faccia agire un alcool diverso da quello da cui deriva l'etere, si ha in certi casi una reazione di doppio scambio secondo lo schema:

$$R_1 A + R_2 OH \rightleftarrows R_1 OH + R_2 A$$

(R_1 e R_2 rappresentano due radicali alchilici e A un radicale acido) è noto già da moltissimo tempo.

Le prime osservazioni degne di nota su questo argomento si debbono a Friedel e Crafts (1). Questi autori scaldando per 40 ore a 240° una miscela di acetato amilico ed alcool etilico, osservarono la formazione di una considerevole quantità di acetato etilico. Inversamente per riscaldamento di un mi-

(1) Bull. Soc. chim., *2*, 103 (1864); Lieb. Ann., *133*, 208 (1864).

scuglio di benzoato etilico ed alcool amilico si forma benzoato amilico. Essi conclusero quindi che « questo scambio procede in modo invertibile nel senso « che il radicale con peso equivalente maggiore sposta l'altro e viene a sua « volta spostato da questo ».

Queste osservazioni rimasero isolate per quasi venti anni fino alle ricerche di G. Bertoni [1] sui nitriti alchilici che costituiscono senza dubbio il gruppo più importante e relativamente completo di lavori su questo argomento. Questo autore, richiamando le osservazioni di Friedel e Crafts, osserva assai giustamente come quando si voglia rendere il più possibile completa una reazione di questo genere, convenga eliminare man mano che si forma uno dei nuovi prodotti affinchè esso non agisca a sua volta contro la formazione di nuove quantità.

Basandosi su questo principio, egli fece agire sul nitrito d'amile varii alcooli a numero d'atomi di carbonio inferiore all'amilico ed osservò sempre abbondante formazione del nitrito corrispondente che egli lasciava distillare. Come era da aspettarsi, osservò che la reazione avveniva più facilmente ed in modo più completo per l'alcool metilico, indi per l'etilico e così via, in relazione alla decrescente volatilità dei nitriti relativi.

Abbiamo in seguito una estesa ricerca di T. Purdie [2] il quale però fa agire gli alcooli sugli eteri composti in presenza di piccole quantità di alchilato sodico o di certi sali quali carbonati alcalini e cloruro di zinco, ed in quasi tutti i casi osserva uno scambio. È chiaro però che qui il fenomeno risulta meno netto e si presta a varie interpretazioni, tanto che il Purdie seguendo le idee di Claisen ammette che la reazione avvenga previa addizione di una molecola di alchilato sodico all'etere già presente. Peters [3] applicò poi il metodo di Purdie agli eteri acetacetici; egli notò che partendo dall'etere etilico lo scambio si ha tanto con alcool metilico, quanto con alcooli superiori, fatto da cui risulta senz'altro evidente la natura invertibile della reazione. Verosimilmente però, mentre la presenza dell'alchilato sodico facilita la reazione, essa non è necessaria; infatti più tardi Cohn [4] trovò che scaldando a 130° per quattro ore un miscuglio equimolecolare di mentolo e di etere acetacetico, distilla la quantità pressochè teorica di alcool etilico e il resto della massa è costituito sostanzialmente da acetato mentilico.

Veniamo ora alle ricerche di Gattermann e Ritschke [5] sugli eteri del p. azossifenolo. Essi trovarono che riducendo con soluzioni di soda caustica in alcool etilico o metilico, p. nitro anisolo o p. nitrofenetolo si ottiene sempre un miscuglio di tre corpi e cioè il p. azossianisolo, il p. azossifenetolo e

(1) Gazz. chim. ital, *12*, 435 (1882); *14*, 23 (1884).
(2) Journ. chem. Soc. *51*, 627 (1887); Berichte, *20*, 1554 (1887).
(3) Lieb. Ann., *257*, 353 (1890).
(4) Monatsh. f. Ch., *21*, 200 (1900).
(5) Berichte, *23*, 1738 (1890).

l'etere misto metiletilico. Qui si può ripetere quanto si disse a proposito delle ricerche di Purdie; gli autori però osservarono che anche prima che cominci la riduzione, gli stessi eteri del nitrofenolo subiscono lo scambio, e che trattando ripetutamente con poco alcool, l'azossianisolo passa in soluzione l'etere metiletilico. Questo fatto che la doppia decomposizione avvenga per semplice azione dell'alcool all'infuori della presenza di alcali, è confermato anche da esperienze eseguite l'anno scorso da me nel laboratorio di Bologna.

Infine ultimamente G. Errera (1) comunicò di aver osservato che riscaldando con alcool etilico in presenza di piccola quantità di etilato sodico l'etere metilico dell'acido naftalico, si forma l'etere etilico corrispondente.

Noi abbiamo creduto interessante di studiare qualcuna di queste reazioni in modo quantitativo dal punto di vista chimico-fisico, stabilendo lo stato d'equilibrio cui può pervenire la reazione partendo da entrambi i due sistemi reciproci, la velocità di reazione con cui questo punto viene raggiunto, e le varie condizioni che possono avere un'influenza come la temperatura o la concentrazione dei corpi reagenti. In quasi tutti i casi succitati si ha questa circostanza, che uno dei prodotti della reazione viene ad essere man mano eliminato, o allo stato di vapore come nei lavori di Bertoni e di Cohn, o allo stato solido come in quelli di Gattermann, ciò che contribuisce a spostare continuamente l'equilibrio in un dato senso. Nei primi due lavori questa circostanza è anzi espressamente voluta, ciò che dal punto di vista preparativo è infatti perfettamente razionale. Pel nostro scopo è invece necessario di mantenere il sistema sempre omogeneo e cercare di avere una indicazione sul punto a cui è giunta la reazione in seno ad essi.

Questo problema presenta difficoltà grandi ed in molti casi, crediamo noi, non superabili. La determinazione quantitativa è possibile, ad esempio, nell'eterificazione perchè si può titolare l'acido eccedente, cioè ricorrere ad un processo di una velocità tanto sproporzionatamente grande rispetto a quello studiato, da non poter avere un effetto apprezzabile sullo spostamento dell'equilibrio. Una reazione di questo genere è qui, data la natura dei corpi studiati, ben difficile a trovare. Anche il metodo di Friedel e Crafts in cui durante il riscaldamento la miscela rimane omogenea, non è però attendibile perchè durante la separazione dei prodotti per distillazione l'equilibrio può evidentemente spostarsi.

Noi abbiamo pensato che una misura facile ad eseguirsi ed esatta poteva aversi quando uno dei due alcooli impiegati sia otticamente attivo, purchè l'etere corrispondente abbia un potere rotatorio notevolmente differente, dimodochè spostamenti anche piccoli della reazione producano cambiamenti apprezzabili dell'angolo di rotazione.

Un alcool che corrisponde alle condizioni volute fu trovato nel mentolo.

(1) Rend. Soc. chim. Roma, *3*, 52 (1905).

Esso ha infatti un forte potere rotatorio (1): $[\alpha]_D = -49,3°$ in soluzione alcoolica 20 %; i suoi eteri posseggono tutti un potere rotatorio notevolmente maggiore, per esempio:

Acetato (2):	$[\alpha]_D =$	— 79,42°
Ossalato (3):	"	— 101,5°
Acetacetato (4):	"	— 68,5°
Benzoato (5):	"	— 90,9°

Facendo quindi un miscuglio del mentolo con eteri di alcooli inattivi, la formazione progressiva di eteri mentilici sarà accusata da un successivo aumento del potere rotatorio.

Abbiamo anzitutto voluto esaminare se, oltre al caso già trovato dal Cohn dell'acetacetato, anche altri eteri etilici possano subire una scomposizione quando siano riscaldati con mentolo. Noi abbiamo quindi sperimentato sull'acetato, sul benzoato, sul malonato e sull'ossalato etilico; nei primi due casi abbiamo avuto un risultato negativo, almeno nelle condizioni da noi realizzate; negli ultimi due invece la doppia decomposizione ha luogo in misura assai notevole.

1. *Acetato etilico + mentolo.*

Si fece un miscuglio equimolecolare dei due corpi (gr. 44 di etere acetico + gr. 78 di mentolo): Densità a 18° = 0,898; deviazione osservata $\alpha_D = -28°,17°$ da cui $[\alpha]_D = -49,03°$.

Lasciato a sè a temperatura ordinaria dopo 20 ore si dimostrò inalterato. Si richiuse in tubo e si scaldò per 10 ore a bagno maria; riaperto il tubo si ebbe una deviazione identica alla primitiva.

2. *Benzoato etilico + mentolo.*

Si fece un miscuglio di gr. 33,5 di etere benzoico e gr. 39 di mentolo: $D_{18} = 0,970$; $\alpha_D = -24,20°$ da cui $[\alpha]_D = -46,22°$.

Riscaldato in tubo chiuso a 80° per 12 ore il miscuglio si dimostrò inalterato. Nell'ipotesi che una traccia di alcool etilico potesse agire come catalizzatore se ne aggiunsero tre goccie ad un'altra porzione che fu riscaldata come la prima. Anche questa rimase inalterata.

(1) Beckmann, Journ. prakt. Ch. [2] *55*, 15.

(2) Tschugaeff, Berichte, *31*, 364 (1898).

(3) Tschugaeff, Berichte, *35*, 2473 (1902).

(4) Lapworth e Hann, Journ. chem. Soc., *81*, 1499 (1902).

(5) Tutte le osservazioni polarimetriche qui accennate furono fatte in tubi di lunghezza di 1 decimetro.

3. *Ossalato dietilico + mentolo.*

Si mescolarono gr. 15,6 di mentolo (1 molecola) con gr. 43,8 di etere ossalico (3 molecole) (1). $D_{20} = 1{,}022$, $\alpha_D = -12{,}40°$ da cui $[\alpha]_D = -46{,}20'$.

Scaldato a bagno maria dimostrò un notevole aumento del potere rotatorio; da tre tubi chiusi si ebbe infatti:

dopo 4 ore: $\alpha_D = -12{,}67°$
» 12 ²/₃ » » $= -13{,}90°$
» 24 » » $= -14{,}85°$.

4. *Malonato dietilico + mentolo.*

Si mescolarono gr. 15,6 di mentolo (1 molecola) con gr. 32,0 di etere malonico (2 molecole). $D_{20} = 0{,}994$, $\alpha_D = -14{,}90°$ da cui $[\alpha]_D = 45{,}74°$.

La reazione sembra procedere assai lentamente anche a freddo; infatti dopo 18 ore si ebbe $\alpha_D = -15{,}10°$.

Si scaldarono 3 tubi a bagno maria e si ebbe:

dopo 4 ore: $\alpha_D = -16{,}07°$
» 12 ²/₃ » » $= -17{,}53°$
» 24 » » $= -19{,}00°$.

Si vede quindi che tanto nel caso dell'ossalato come in quello del malonato la reazione procede con discreta velocità.

Nell'impiego di questi due eteri per una ricerca quantitativa sorge però una difficoltà non lieve e cioè il dubbio di una possibile formazione, oltrechè dell'etere dimentilico, anche dell'etere misto mentiletilico. Ci riserviamo di stabilire se ciò avvenga realmente; frattanto però credemmo opportuno operare sull'etere di un acido monobasico e scegliemmo l'etere acetacetico già studiato dal Cohn e dal Lapworth e Hann (l. c.).

Etere acetacetico + mentolo.

Le esperienze qui descritte furono eseguite su miscele fatte nelle proporzioni seguenti:

1). Gr. 130 di acetacetato etilico (2 molecole) + gr. 78 di mentolo (1 molecola); adoperammo questa proporzione perchè il mentolo non si scioglie maggiormente a temperatura ordinaria. La miscela ora detta presentava una densità: $D_{20} = 0{,}970$, $\alpha_D = 17{,}20°$ da cui $[\alpha]_D = -47{,}25°$.

2) Ci preparammo poi una miscela uguale a quella a cui condurrebbe la reazione qualora procedesse in modo completo e cioè nel rapporto: 1 mol.

(1) Il mentolo non si scioglie a temperatura ordinaria in proporzione maggiore.

acetacetato mentilico + 1 mol. alcool etilico + 1 mol. acetacetato etilico. L'etere mentilico fu ottenuto secondo le indicazioni degli autori succitati e corrispondeva alle proprietà date da essi. La densità della soluzione ottenuta mescolando gr. 24 di acetacetato mentilico, gr. 4,6 di alcool etilico e gr. 13 di acetacetato etilico era: $D_{20} = 0{,}969$, cioè non sensibilmente diversa da quella della miscela reciproca.

Il potere rotatorio è: $\alpha_D = -36{,}33°$ da cui si calcola per l'etere mentilico $[\alpha]_D = -64{,}63°$.

Entrambe queste miscele lasciate a sè alla temperatura ambiente di circa 20° non alterano sensibilmente il loro potere rotatorio, nemmeno dopo varii giorni; ricercheremo in seguito se effettivamente la reazione non proceda in queste condizioni o se solamente la sua velocità sia divenuta così piccola da non essere apprezzabile. Comunque questo fatto ci fu di grande utilità, perchè permette dopo di aver riscaldato per un certo tempo alla temperatura voluta, raffreddando poi bruscamente il tubo, di eseguire le misure polarimetriche a temperatura ordinaria anche dopo un certo tempo senza introdurre un errore apprezzabile.

Si trattava anzitutto di stabilire se la reazione sia invertibile e quale sia il punto di equilibrio a cui si giunge. Per raggiungere più rapidamente tale risultato, abbiamo operato a 100° riempiendo colle due miscele tubi che si tenevano immersi completamente in un recipiente di acqua bollente. I risultati furono i seguenti:

1) la miscela di etere acetacetico e mentolo che aveva prima un potere rotatorio $= -17{,}20°$ mostrava:

dopo	6	ore	$\alpha_D = -26{,}07°$
»	14	»	» $= -27{,}90°$
»	20	»	» $= -28{,}26°$.

2) La miscela inversa il cui angolo di rotazione iniziale era $\alpha_D = -36{,}33°$ dava dopo 24 ore $\alpha_D = -28{,}20°$.

La differenza fra i due valori finali è tanto piccola da cadere entro gli errori d'osservazione.

Ammettendo *per ora in via approssimativa* che il potere rotatorio specifico del mentolo e dell'acido mentilico restino invariati anche nelle loro soluzioni miste, si calcolerebbe che la reazione:

$$C_3H_5O \cdot COO \cdot C_2H_5 + C_{10}H_{19} \cdot OH \rightleftarrows C_3H_5O \cdot COO \cdot C_{10}H_{19} + C_2H_5 \cdot OH$$

è a 100° in equilibrio quando su 100 parti di mentolo 57,6 si sono trasformate nel corrispondente etere acetacetico. Questo almeno per una miscela della composizione da noi impiegata; certamente variando i rapporti fra mentolo ed etere acetacetico varierà anche il punto di equilibrio e su ciò abbiamo

in corso esperienze. Avendo osservato che la reazione procede a 100° con velocità così considerevole, abbiamo pensato che operando a temperatura alquanto inferiore si sarebbe potuto studiare più esattamente la velocità di reazione. Abbiamo quindi sperimentato a circa 80° riscaldando numerosi tubi delle due miscele nel vapore di benzolo bollente, mediante una disposizione che descriveremo più dettagliatamente altrove; la temperatura si manteneva così esattamente a 79,9°.

La reazione procede infatti anche a questa temperatura ma assai più lentamente. La diminuzione della velocità col decrescere della temperatura è anzi in questa reazione assai più sensibile che nella maggior parte dei casi finora studiati. Diamo senz'altro i risultati ottenuti:

1) partendo dalla miscela primitiva che presenta una deviazione iniziale: $\alpha_D = -17{,}20°$ si ebbe:

dopo	1	ora:	$\alpha_D = -17{,}53°$
»	2	ore:	17,73°
»	4	»	18,13°
»	6	»	18,53°
»	9	»	19,10°
»	12	»	19,60°
»	18	»	20,63°
»	24	»	21,33°
»	30	»	22,13°
»	40	»	22,83°
»	100	»	25,73°

2) Partendo dalla miscela inversa di un potere rotatorio iniziale $\alpha_D = -36{,}33°$ si osservò:

dopo	6	ore:	$\alpha_D = -35{,}50°$
»	18	»	33,90°
»	40	»	32,47°
»	100	»	29,85°
»	155	»	28,73°

A quanto si vede anche dopo 155 ore, sia partendo da un lato, sia dall'altro le due reazioni non si sono incontrate.

Per stabilire più sollecitamente il punto di equilibrio, e nello stesso tempo per vedere se e come questo varii colla temperatura, abbiamo posto a 79,9° un tubo della miscela 1) che era stato previamente riscaldato a 100° per 24 ore e cioè per un tempo più che sufficiente a raggiungere lo stato di equilibrio, e ve lo abbiamo mantenuto per altre 16 ore; aperto abbiamo trovato $\alpha_D = -28{,}20°$ identico cioè al valore raggiunto a bagno maria.

Sembra dunque che la temperatura non abbia una influenza sensibile su questo equilibrio, analogamente a questo si osserva per l'eterificazione dell'acido acetico.

Ciò implica la condizione che la reazione avvenga senza apprezzabile svolgimento od assorbimento di calore, fatto che noi ci proponiamo di verificare.

Abbiamo tentato di applicare alle due serie 1) e 2) le formole relative alla velocità delle reazioni bimolecolari e precisamente alla 1) l'equazione

$$K = \frac{\log (A - x) - \log (B - x) - (\log A - \log B)}{0{,}4343\,(A - B)\,\theta}$$

che vale per quantità non equivalenti dei due reattivi, alla 2) l'equazione più semplice $K = \frac{x}{A\,(A - x)\,\theta}$.

Non si ottengono però in nessuno dei due casi valori di K che presentino una costanza soddisfacente, ma questi valori vanno alquanto decrescendo col crescere del tempo.

Ci proponiamo di studiare le cause di queste deviazioni.

A queste ricerche che hanno un carattere di esperienze preliminari ed orientatrici, ne faremo seguire numerose altre che abbiamo già iniziate seguendo un piano assai vasto.

Chimica. — *Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel.* Nota di O. Carrasco e M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici.* Nota preliminare di A. Manuelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Azione del cloruro di solforile sul pirazolo.* Nota di G. Mazzara e A. Borgo, presentata dal Socio E. Paternò.

Chimica. — *Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche.* Nota del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Socio G. Struever.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale.* Nota del dott. Aristide Rosati, presentata dal Socio G. Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione della benzilammina sull'α-crotonato etilico* (1). Nota di G. Sani, presentata del Socio G. Körner.

La possibilità di sostituire una doppia legatura fra due atomi di carbonio cogli elementi di una molecola di ammoniaca, fu da tempo dimostrata dai professori Körner e Menozzi per gli acidi maleico e fumarico e successivamente, con parecchi lavori, venne affermato che tale reazione era affatto generale.

Ciò che ancora ha interesse non dubbio si è lo studio dei composti contenenti residui delle vere ammine aromatiche in luogo di doppie legature in acidi della serie grassa, anche per vedere se prevalgono in essi le proprietà inerenti al gruppo ciclico in confronto di quelle della parte della molecola a catena aperta.

Ho a tale scopo fatto agire sull'alfacrotonato etilico la benzilammina nel rapporto di 1 mol. del primo a 2 mol. della seconda, assieme ad alcool assoluto, scaldando per due giorni a 150° in tubi chiusi.

Dopo questo tempo si ha abbondante formazione di cristalli raggruppati a grandi rose che, estratti dai tubi, eliminato l'alcool, vennero lavati alla pompa con grande quantità d'acqua nella quale sono perfettamente insolubili. La massa cristallina essiccata sopra piastre porose venne disciolta in alcool e fatta cristallizzare, poscia ricristallizzata da alcool ed etere lentamente.

Si ebbero così cristalli splendidi, brillanti, bene sviluppati, anidri, fondenti a 115°-116°. In essi venne determinato l'azoto col metodo Kyeldhal e col metodo Dumas e fornirono i seguenti risultati:

Metodo Kyeldhal.

Sostanza presa . . . . . gr. 0,3913
Cm^3 H^2 SO^4 normale occorsi . . 2,8
pari ad azoto. . . . . gr. 0,0392

il che da % = 10,107.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agr. di Perugia.

Metodo Dumas.

Sostanza presa . . . . . gr. 0,3927
Azoto ottenuto . . . . . V = 36,30
alla pressione . . . . . P = 724
alla temperatura . . . . . t° = 18°
pari ad azoto . . . . . gr. 0,0405

il che da % azoto = 10.32

Ora per

$$\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ C^{\underline{H}}N^{\underline{H}}C^7H^7 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ C^{\underline{O}}N^{\underline{H}}C^7H^7 \end{array}$$

che non è altro che l'ammide benzilata dell'acido benzilamminobutirrico; si calcola azoto % = 9,80

Di questo composto il prof. Artini ebbe la bontà di fare lo studio cristallografico e mi comunicò i seguenti risultati:

« Sistema trimetrico:

$$a : b : c = 1,1113 : 1 : 0,4774.$$

« Forme osservate:

$$\{100\} \cdot \{001\} \cdot \{110\} \cdot \{101\} \cdot$$

cristalli allungati secondo l'asse y.

$$(100) \cdot (110) = 48°, 1'.$$
$$(100) \cdot (101) = 65°, 45'.$$

« Sfaldatura perfetta secondo $\{100\}$. Piano degli assi ottici $\{010\}$; bisettrice acuta normale a $\}100\{$ ».

Non solo il comportamento di questa distanza di fronte ai solventi e la sua forma cristallina sono caratteristici, ma ancora le sue proprietà chimiche presentano il più grande interesse; infatti la presenza di residui della benzilammina imparte tale stabilità alla molecola che non si riesce a separare, per saponificazione con barite, quel residuo di benzilammina che è contenuto sotto forma ammidica, mentre è noto che nelle ammidi naturali l'azoto ammidico è labilissimo.

Geologia. — *A proposito della esistenza del Culm nelle Alpi Carniche.* Nota di P. Vinassa de Regny, presentata dal Socio G. Capellini.

Recentemente P. G. Krause ha riaperta la questione dell'esistenza del Culm nella catena principale delle Alpi Carniche, con alcune osservazioni le quali a mio parere non apportano nuove convincenti ragioni (1).

È noto che Foetterle e Stur prima e Stache più tardi, avevano espresso le loro ragioni a favore dell'esistenza del Culm nelle Alpi Carniche. Il Taramelli invece in varî lavori si era dimostrato contrario.

Il Frech, la cui noncuranza per qualsiasi studio nostro risulta ben chiara ad ogni pagina della sua opera, non tenne alcun conto dell'opinione del geologo italiano e segnò estesamente il Culm nelle Alpi Carniche (2).

Di uguale opinione fu pure il Geyer fino al 1897. Ma in quell'epoca anche il Geyer (3) accolse l'idea del Taramelli negando l'esistenza del Culm e riferendo al Siluriano i terreni sin'allora da lui ascritti al Carbonifero inferiore.

Le ricerche mie e del dott Gortani (4), per quanto limitate a pochi ma tipici punti delle Alpi Carniche, hanno confermata la mancanza del Culm, poichè abbiamo trovato immediatamente sovrastanti ai calcari devoniani fossiliferi ed agli scisti e calcari siluriani gli scisti pure fossiliferi del Carbonifero superiore, in trasgressione.

Una scoperta di grande interesse fu quella della *Nevrodontopteris auriculata* negli scisti nerastri addossati al devoniano del Coglians presso al ricovero Marinelli. Di essa parlai subito nella adunanza straordinaria appositamente tenuta al Ricovero la sera del 22 agosto 1905 (5).

Per tale scoperta, unita ad altri risultati della campagna geologica della estate scorsa, la trasgressione carbonifera veniva estesa per parecchi chilometri, come ho dimostrato in un mio recente lavoro sull'argomento (6).

(1) *Ueber das Vorkommen von Kulm in der karnischen Hauptkette*, Verh. d. k. k. geol. Reichsanst., 1906, 2, pag. 64, adun. 30 gennaio 1906.

(2) Frech F., *Die Karnischen Alpen*, pag. 303 e carta.

(3) *Ueber neue Fundpunkte von Graptolitenschiefern in den Südalpen und deren Bedeutung für den alpinen « Kulm »*, Verh. d. k. k. geol. Reichsan., 1897, 12-13.

(4) *Osservazioni geologiche sui dintorni di Paularo*, Boll. S. geol. it., XXIV, 1, pagg. 1-16 e carta; *Fossili carboniferi del M. Pizzul e del Piano di Lanza*, ibidem, XXIV, 2, pagg. 461-605; *Nuove ricerche geologiche sui terreni compresi nella tavola « Paluzza »*, ibidem, XXIV, 2, pagg. 720-723.

(5) Boll. Soc. geol. it., XXIX, pag. Lvi-Lvii.

(6) *Sull'estensione del Carbonifero nelle Alpi Carniche*, Boll. S. g. it., XXV, 2, seduta del 4 marzo 1905.

Evidentemente il Krause ignorava completamente la scoperta della felce e le poche ma importanti deduzioni che credei doverne ritrarre, quantunque il Bollettino della nostra Società geologica fosse pubblicato già da qualche tempo quando egli fece la sua comunicazione. Ed io credo che se avesse avuto notizia di quanto avevo scritto non avrebbe forse pubblicato, almeno nella forma attuale, la sua Nota. Non era infatti il caso di dire: « Geyer und die Italiener halten eben, weil diese Gesteine (Kieselschiefer) in der in der Rede stehenden Schiefergruppe (Graptolithenführend) vorkommen, diese in ihrer Gesammtheit für silurisch »(1).

Le ragioni per cui il Krause trova che gli scisti in questione appartengono al Culm sono di due ordini: tettoniche cioè e paleontologiche.

Egli avverte, e con ragione, che in molti luoghi gli scisti ricoprono i calcari devoniani. « Die oberdevonischen Plattenkalke, egli scrive, haben hier (am Grossen Pal) eine ganz schwach, unregelmässig wellige Oberfläche. An diese schmiegen sich auf das engste die Sedimente der Schiefergruppe an. Sie machen den Eindruck, als ob sie darauf gegossen wären, wenn ich so sagen darf. So fest und innig ist der beiderseitige Verband » (2).

Effettivamente è così: gli scisti carboniferi riempiono le più piccole insenature, le più dolci curve dei calcari devoniani. Ma questo si vede non solo a Pal Grande, ma in altri luoghi ancora e più specialmente alla base del Coglians, come ad esempio lungo la discesa dal Ricovero Marinelli a Timau. Questi scisti però non sono del Culm, ma sibbene del Carbonifero superiore trasgressivo.

Il Krause avrebbe ragione se tali scisti, come volle il Geyer generalizzando troppo, si considerassero tutti siluriani: occorrerebbe infatti immaginare un rovesciamento fortissimo e difficilmente esplicabile. Ma ammettendo, come credo di aver dimostrato, che si abbiano scisti abbastanza simili non solo siluriani ma anche carboniferi e talvolta, come ad esempio al Ricovero Marinelli, anche a contatto, e che la trasgressione neocarbonifera sia molto più estesa di quanto sinora non si credesse (3), cessa ogni possibile opposizione tettonica posta innanzi dal Krause.

Resta adunque la sola quistione paleontologica. Il Taramelli, il Geyer, il Frech avevano trovati dei frammenti mal determinabili di tipo calamitoide. Com'è ben naturale, il Frech che in essi voleva riconoscere dei tipi del Culm li ha determinati come tali (4); il Geyer che credeva tutti gli scisti

(1) Krause, op. cit, pag. 67.

(2) Krause, op. cit, pag. 65.

(3) Vedi la cartina schematica annessa al mio lavoro: *Sull'estensione del carbonifero superiore nelle Alpi Carniche*, Boll. S. g. it., XXV, 2,. La trasgressione è però certamente anche più estesa.

(4) *Ueber tektonische Veränderungen in der Form untercarbonischer Calamarien*, N. Jahrb. für Min. Geol. u. Pal. 1889, I. pagg. 259-261.

siluriani per aver trovato graptoliti in altri scisti da lui creduti identici a quelli con avanzi di piante, diceva a ragione che gli esemplari non permettevano determinazione sicura e li chiamava pseudocalamiti.

La fortunata scoperta della *Nevrodontopteris auriculata* e quella successiva di una tipica *Calamites Cisti* Brgrt. (1), ha quindi per la quistione che ci occupa una grande importanza. Anche il Krause ha avuto la ventura di scoprire due impronte vegetali, che egli non figura, e che il Potonié ha determinato come *Stigmaria ficoides* ed *Asterocalamites scrobiculatus*. Di questi due fossili, solo l'*Asterocalamites* è tipico del Culm; ma è ben noto come la determinazione di questi avanzi, quando non siano perfettamense conservati, riesca abbastanza difficile.

Dal canto mio faccio notare come l'esemplare di *Nevrodontopteris auriculata* sia talmente identico come forma e tipo di fossilizzazione agli esemplari del M. Pizzul, da poter essere scambiato con uno di essi.

Resterebbe infine la stranezza rilevata dal Krause della esistenza del Carbonifero inferiore a Nötsch e della mancanza del Culm nella catena carnica. Ora a me sembra logico che a spiegare tale stranezza due modi si presentino: o la effettiva presenza del Culm nella catena carnica, come vuole il Krause, o una revisione della fauna di Nötsch che potrebbe anche riserbare qualche sorpresa.

Concludendo quindi, a me pare che la Nota del Krause non apporti sino ad oggi alcun nuovo valido fondamento per dimostrare l'esistenza del Culm nella catena principale delle Alpi Carniche; ma che intanto si possa ammettere l'esistenza di scisti, arenarie ecc., del Neocarbonifero fossilifero, discordanti sul Devoniano non solo, ma anche sopra scisti pure fossiliferi appartenenti al Siluriano.

Biologia. — *Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante.* Nota preliminare di B. Gosio, presentata dal Socio R. Pirotta.

Biologia. — *Sulla produzione di cumarine fermentative nello sviluppo di taluni ifomiceti.* Nota preliminare di B. Gosio, presentata dal Socio R. Pirotta.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Vinassa de Regny P., *Sull'estensione del Carbonifero superiore nelle Alpi Carniche*, Boll. S. geol. it.. XXV, 2, figg. 1, 2, 3; Gortani M., *Sopra alcuni fossili neocarboniferi delle Alpi Carniche*, Boll. S. geol. it., XXV, 2, figg. 2. 3.

Zoologia. — *Sviluppo dell'*Ageniaspis fuscicollis (Dalm.) Thoms. *(Chalcididae)*. Nota preliminare di Filippo Silvestri, presentata dal Socio B. Grassi.

Continuando ad occuparmi della biologia degli Imenotteri parassiti ho scelto per oggetto di ricerche l'*Ageniaspis fuscicollis* (Dalm.) Thoms, la stessa specie nello sviluppo della quale fu scoperto dal Marchal il primo caso di una singolare poliembrionia tra gli insetti. L'autore ricordato pubblicò nel 1904 (1) un esteso lavoro, assai interessante, sullo sviluppo di tale insetto, però non si occupò della formazione dei globuli polari e dell'origine dell'involucro degli embrioni, che egli chiamò *trophamnios*. Su tali punti io ho specialmente fermato la mia attenzione.

L'*Ageniaspis fuscicollis* da me studiato è parassita del *Prays oleellus* e sembra, secondo il parere di valenti conoscitori di microimenotteri, specificamente non diverso dall'*Ageniaspis fuscicollis* parassita di varie specie di *Hyponomeuta*, che fu studiato dal Marchal. Mi riserbo però più tardi, quando avrò abbondante e fresco materiale di detta specie ottenuto da *Hyponomeuta*, di fare un minuto esame comparativo tra gli esemplari parassiti dell'ultimo genere ricordato e quelli parassiti del *Prays*, poichè essendo il numero delle loro generazioni, come dirò appresso, molto diverso e diverso il numero degli embrioni, che si sviluppano da un uovo, dubito che possa trattarsi almeno di una sottospecie distinta.

Uovo ovarico a completo sviluppo.

L'uovo ovarico di *Ageniaspis fuscicollis* allo stadio di ovocite di 1° ordine ha la forma di un fiasco della lunghezza di μ. 66 (2) dei quali 29 spettano alla pancia del fiasco, che ha una larghezza massima di μ. 13, e 37 al collo. Questo è molto più largo all'apice che verso la parte mediana. Tutto l'uovo è circondato da un sottilissimo chorion che in corrispondenza alla parte anteriore del collo presenta una piccola introflessione imbutiforme, che forse rappresenta il micropilo, come ritenne il Bugnion (3). L'ooplasma ha una struttura finamente granulosa e contiene poche e piccole sfere di grasso variamente disposte.

(1) Archivio di zool. exp. et gén. (*4*), II.

(2) Secondo il Bugnion ed il Marchal l'uovo di questo *Ageniaspis* parassita dell'*Hyponomeuta* misura in lunghezza mm. 0,14.

(3) Recueil zoologique suisse, tome V, fascicules 3-4 (1891).

Il nucleo dell'ovocite di 1° ordine si trova sempre presso l'estremità anteriore del collo e si presenta sotto forma di tre o quattro masse di cromatina compatte, allungate e separate fra di loro da un solco chiaro. Il nucleolo è sferico e situato al polo opposto dell'uovo, poco lungi dalla base della parte allargata di esso. Il Bugnion ed il Marchal non osservarono il vero nucleo dell'uovo e ritennero come tale il nucleolo.

La struttura dell'uovo dell'*Ageniaspis fuscicollis* (Dalm.) corrisponde a quella da me descritta (1), per l'uovo del *Litomastix truncatellus* (Dalm.).

Deposizione dell'uovo.

L'uovo viene deposto nello stadio sopradescritto nell'uovo di *Prays oleellus* tanto da femmine ancora vergini come da femmine, che hanno subìto l'accoppiamento; in quest'ultimo caso l'uovo però ora è deposto fecondato ed ora non fecondato come nel caso di femmine vergini.

L'uovo appena deposto conserva la forma a fiasco, ma presto il suo collo si ritira verso la parte allargata insieme al nucleo restando di esso per qualche tempo una piccola porzione come appendice dell'uovo, che in seguito viene del tutto riassorbita. L'uovo deposto, nei preparati dopo fissazione e le altre manipolazioni necessarie alla loro colorazione e conservazione in balsamo, misura in lunghezza μ. 38-44 e in larghezza μ. 13-14.

Il nucleo dell'uovo appena deposto si presenta sotto forma più o meno sferica o leggermente ovale e con la cromatina in grossi granuli ammassati insieme a guisa di morula.

Il nucleolo conserva la sua forma sferica e presso a poco la posizione che aveva nell'uovo ancora contenuto nell'ovario.

Maturazione dell'uovo.

La maturazione dell'uovo avviene in modo identico nelle uova partenogenetiche come in quelle fecondate.

Dopo la deposizione il nucleo dell'ovocite di 1° ordine passa nello spazio di 10-20 minuti allo stadio di anafasi (in metafasi non ho potuto osservarlo in alcun uovo) avente la posizione più o meno obliqua rispetto all'asse longitudinale dell'uovo e quindi dà origine a due masse cromatiniche delle quali una rappresenta il 1° globulo polare, l'altro il nucleo dell'ovocite di 2° ordine.

Il 1° globulo polare è più o meno avvicinato alla parte anteriore dell'uovo, il nucleo dell'ovocite di 2° ordine per lo più non giunge oltre la metà anteriore dell'uovo, alle volte un poco più indietro.

(1) Cfr. questi stessi Rendiconti (5), vol. XIV, 2° sem. 1905, pag. 535 e Ann. R. Scuola Sup. Agricolt. Portici, vol. VI (1906).

A mezz'ora dalla deposizione il 1° globulo polare ed il nucleo dell'ovocite di 2° ordine sono già passati ciascuno allo stadio di metafasi con fuso tronco agli estremi e avente l'asse longitudinale parallelo o di poco obliquo all'asse longitudinale dell'uovo.

Dallo stadio di metafasi si passa a quello d'anafasi e quindi si ha il 1° globulo polare diviso in due nuclei come pure il nucleo dell'ovocite di 2° ordine, che dà origine al 2° globulo polare ed al pronucleo femminile. Questo resta nella parte posteriore dell'uovo presso il nucleolo e presto si ricompone in un grosso nucleo completo sferico con membrana e reticolo, il 2° globulo polare e i due nuclei derivati dalla divisione del 1° globulo polare si avvicinano fra di loro nella parte anteriore dell'uovo, ma il nucleo anteriore del 1° globulo polare è sempre un poco distante dal posteriore, che invece è vicinissimo, contiguo spesso, al 2° globulo polare. Questi tre nuclei appariscono sotto forma di masse cromatiniche più o meno compatte, mentre il pronucleo femminile si è composto, come ho detto, in nucleo completo allo stato di riposo.

In alcune uova ho osservato una fusione completa delle tre masse polari di cromatina.

La parte anteriore dell'ooplasma, che contiene i globuli polari, appare in questo stadio distinta dal resto dell'ooplasma per mezzo di un tenue solco e assume con minore intensità i colori plasmatici; abbiamo perciò a tale stadio diviso l'uovo in una parte anteriore, meno tingibile, corrispondente alla terza o quarta parte dell'uovo intero e contenente tre masse di cromatina, delle quali due rappresentano i nuclei derivati dalla divisione del 1° globulo polare ed una il 2° globulo polare, ed una parte, che comprende tutto il resto dell'uovo e che contiene il pronucleo femminile, il pronucleo maschile, se l'uovo è stato fecondato, ed il nucleolo: la prima parte dell'uovo contenente i globuli polari si può designare col nome di parte polare, l'altra di parte embrionale.

Il nucleolo durante la formazione dei globuli polari non cambia nè di forma, nè di posizione.

Fecondazione dell' uovo.

Nell'uovo fecondato appena deposto si osserva lo spermatozoo nella parte posteriore dell'uovo sempre più o meno avvicinato al nucleolo e con la coda ben distinta. In seguito la testa dello spermatozoo, che era a forma di un pistillo con la parte assottigliata corrispondente al polo libero, si accorcia, si separa dalla coda, si arrotonda dapprima, poi si scinde nei suoi cromosomi e forma un nucleo completo con membrana e reticolo, il pronucleo maschile, che si addossa a quello femminile e con esso si fonde dando così il 1° nucleo di segmentazione.

Mentre si compie il sopradescritto fenomeno, il nucleolo conserva ancora la sua forma e posizione.

Segmentazione.

Il primo nucleo di segmentazione, derivato soltanto dal pronucleo femminile nelle uova partenogenetiche o dall'unione del pronucleo maschile col femminile in quelle fecondate, si trova sempre verso la parte mediana o terza parte posteriore della regione embrionale dell'uovo ed ha poco lungi da esso il nucleolo.

Prima divisione di segmentazione. — A circa 3 ore dalla deposizione il 1° nucleo di segmentazione passa allo stadio di profasi e poi a quello di metafasi tipica con l'asse longitudinale del fuso parallelo all'asse longitudinale dell'uovo o di poco obliquo, così da esso derivano i primi due nuclei di segmentazione, che vengono a trovarsi in una posizione più o meno parallela allo stesso asse longitudinale dell'uovo. Con la divisione del 1° nucleo di segmentazione anche l'ooplasma embrionale si divide in due parti e si hanno così le prime due cellule di segmentazione che sono più o meno sferiche e situate nella metà posteriore dell'uovo l'una innanzi all'altra.

Il nucleolo passa intero ad una delle due cellule di segmentazione, la quale è per lo più quella situata presso il polo posteriore dell'uovo, alle volte l'altra.

Mentre nella parte embrionale dell'uovo è avvenuta la formazione delle prime due cellule di segmentazione, la parte polare di esso si è estesa lateralmente e posteriormente a circondare con porzione di protoplasma le due cellule di segmentazione, ed i tre nuclei polari si sono scissi nei loro cromosomi formando tre nuclei completi con membrana e reticolo.

Invece di ritenere che la parte polare dell'uovo si estende posteriormente a circondare le prime due cellule di segmentazione, si può anche ammettere che la parte periferica dell'ooplasma embrionale non prende parte alla formazione delle prime due cellule di segmentazione e che resta continua con l'ooplasma polare a formare un involucro intorno a dette cellule, che sono le embrionali.

Durante questo stadio, che si completa in circa 4 ore dalla deposizione, la parte polare dell'uovo è ancora molto estesa anteriormente, i suoi tre nuclei sono addossati variamente l'uno all'altro ed il suo protoplasma comincia a presentarsi non più omogeneo, ma come formato da una sostanza spugnosa più tingibile nelle pareti divisorie delle cavità.

L'uovo intero si presenta in questo stadio più o meno ellittico e senza appendici alla parte anteriore polare.

Seconda divisione di segmentazione. — La seconda divisione di segmentazione non avviene sincronicamente in ambedue le cellule embrionali, ma

con notevole distanza di tempo tra quella della cellula, alla quale non è passato il nucleolo e quella dell'altra, in ambedue però con le fasi tipiche della divisione indiretta.

La prima cellula, che si divide, è quella senza nucleolo ed il suo fuso è disposto con l'asse longitudinale più o meno obliquamente all'asse longitudinale dell'uovo.

Verso la 15ª ora dalla deposizione è completata la divisione della cellula embrionale senza nucleolo ed allora la regione embrionale è composta di tre cellule. Nello spazio di circa 5-8 ore avviene la divisione della cellula, alla quale era passato intero il nucleolo e così si ha completata la seconda divisione di segmentazione, risultato della quale è la formazione di 4 cellule embrionali.

Il nucleolo è sempre molto ben visibile addossato al nucleo di una delle due cellule embrionali fino a che quella, che ne è sprovvista, non si è divisa, mentre però avviene la divisione di quest'ultima cellula, il nucleolo comincia a frazionarsi e a disperdersi per il protoplasma della cellula che lo contiene, così che quando si hanno tre cellule embrionali esso non si rileva affatto o poco e solo per la maggiore tingibilità del protoplasma.

La parte polare dell'uovo circonda sempre le cellule embrionali, è ancora più estesa nella parte anteriore dell'uovo ed i suoi nuclei si sono allargati molto ed in parte od in tutto frazionati o divisi direttamente ed irregolarmente per il protoplasma.

Terza divisione di segmentazione. — Durante questo stadio continuando a ritardare la divisione delle due cellule derivate da quella col nucleolo si ha una divisione delle due cellule senza nucleolo, alla quale non ne corrisponde una delle prime nominate; per tal modo si ottiene uno stadio, in cui la regione embrionale è composta di sei cellule. Ciò ha luogo a circa due giorni dalla deposizione.

Quarta divisione di segmentazione. — La quarta divisione di segmentazione porta il numero delle cellule embrionali senza nucleolo a otto e durante questa compiendosi anche la terza divisione delle cellule embrionali, che hanno ricevuto la sostanza nucleolare, si ottiene uno stadio in cui l'uovo di *Ageniaspis* è composto di dodici cellule embrionali e di un involucro, che possiamo chiamare senz'altro col Marchal *trophamnios*, derivato dall'ooplasma polare e contenente pure i nuclei polari, i quali si sono diffusi per la massa protoplasmatica dividendosi, come ho detto, direttamente e irregolarmente, e formano ciò che il Marchal chiamò *paranucleo*.

Ulteriori stadii di sviluppo.

Col materiale, che ho avuto fino ad ora a mia disposizione, non ho potuto seguire la segmentazione oltre lo stadio di dodici cellule embrionali; però non c'è alcuna ragione di credere che essa non avvenga in seguito in modo affatto normale.

Io non ho osservato la prima separazione di gruppi di cellule embrionali, che avviene per mezzo del *trophamnios*, che aumentando di volume si insinua tra le cellule embrionali stesse dividendole in tanti gruppi, ciascuno dei quali darà origine ad un embrione, ma dall'osservazione degli stadî posteriori ritengo che avvenga come fu descritta dal Marchal.

Negli stadî posteriori io ho osservato complessi poliembrionali derivati da un uovo, che sono formati da uno strato esterno molto sottile di cellule, che io ritengo adipose, da uno strato interno di protoplasma ricchissimo di nuclei, che è il *trophamnios*, e che si continua a guisa di maglie più o meno grosse intorno a ciascun gruppo di cellule embrionali, il quale rappresenta una vera morula. Di queste morule il numero maggiore da me esaminato in una massa poliembrionale è stato di 17, il minore di 11.

Il Bugnion ed il Marchal descrissero l'involucro esterno del complesso poliembrionale o membrana avventizia dell'*Ageniaspis* come formato da un epitelio disposto similmente a quello pavimentoso, ma a me sembra che sia costituito da cellule adipose molto irregolari per forma. In qualche massa poliembrionale situata in mezzo a tessuto adiposo io non ho visto alcuna cisti interposta fra esso e il *trophamnios*; ciò mi fa ritenere che la membrana esterna o cisti della massa poliembrionale sia sempre derivata da tessuto adiposo soltanto.

Rispetto alla struttura del *trophamnios* noterò che in preparati fissati con acqua bollente esso appare composto di un protoplasma contenente grandi nuclei a contorni irregolari e con granuli di cromatina fittamente disposti; in preparati fissati invece con sublimato alcoolico-acetico e che sembrano bene conservati, nella massa protoplasmatica granulosa esso presenta numerosissimi nuclei vescicolari con piccoli granuli di cromatina e grossi granuli di altre sostanze in numero vario.

La massa poliembrionale dell'*Ageniaspis fuscicollis* nel *Prays oleellus*, quando contiene embrioni prossimi a diventare liberi e in numero di undici, è nastriforme e misura in lunghezza circa mm. 4. Gli embrioni si trovano allineati l'uno di seguito all'altro, spesso verso la parte anteriore e la posteriore qualcuno di fianco ad un altro.

Note biologiche.

L'*Ageniaspis fuscicollis* diventa adulto molto raramente nelle larve di *Prays* (almeno per ciò, che ho osservato fino ad ora su materiale della Calabria), di regola lo diventa nelle crisalidi di tale specie, mentre secondo il Bugnion ed il Marchal la stessa specie di *Ageniaspis* diventa adulto nelle larve di *Hyponomeuta*.

L'*Ageniaspis fuscicollis* parassita nel *Prays* compie tre generazioni in un anno quante ne ha la specie, che lo ospita, mentre la stessa specie parassita nell'*Hyponomeuta* ha una generazione per anno.

Se gli studî comparativi, che io farò tra breve, confermeranno in modo assoluto l'identità specifica dell'*Ageniaspis* parassita del *Prays* con quello dell'*Hyponomeuta*, si dovrà concludere che lo sviluppo di un parassita endofago è in questo, ed io credo in molti altri casi, sincrono a quello della specie che lo ospita, anche quando esso attacca specie molto diverse per ciclo biologico, per modo che ad un dato numero di generazioni di ciascuna specie corrisponde un ugual numero di generazioni del parassita.

Numeri di individui che si sviluppano da una Crisalide di Prays e loro sesso.

Alla fine di aprile posi 21 crisalidi di *Prays oleellus* parassitizzate, separate l'una dall'altra, in tubi di vetro ed ottenni gli individui qui sotto indicati.

	♀♀		♂♂
1ª crisalide	12	11ª crisalide	12
2 »	13	12 »	11
3 »	11	13 »	10
4 »	9	14 »	11
5 »	11	15 »	11
6 »	11	16 »	5
7 »	7	17 »	8
8 »	10	18 »	15
9 »	10	19 »	10
10 »	6	20 »	13
		21 »	12

Da tale elenco risulta che il numero maggiore di individui ottenuti da una crisalide è stato di 15, il minore di 5 ed il più frequente di 10-13. Come sopra ho notato, in una massa poliembrionale contai 17 morule, perciò in qualche caso si potranno ottenere alcuni individui in più di 15; oppure alcuni individui possono andar perduti? Tornerò su questo argomento in seguito.

Dall'uovo di *Ageniaspis fuscicollis* deposto nell'*Hyponomeuta*, secondo le osservazioni del Bugnion e del Marchal, si ottengono in media un centinaio di individui; pertanto tra l'*Ageniaspis fuscicollis*, che parassitizza il *Prays* e quello che parassitizza l'*Hyponomeuta*, si ha una grande differenza nel numero degli individui, che si sviluppano da un uovo. Se realmente l'*Ageniaspis fuscicollis* del *Prays* non è distinto specificamente da quello dell'*Hyponomeuta*, si deve ammettere che individui di una stessa specie completamente isolati per molte generazioni, pur conservando inalterati i loro caratteri specifici, sono giunti in seguito a continuata selezione a produrre

uova capaci di dare origine a tanti embrioni quanti è capace di nutrirne il corpo della specie, nella quale vengono depositate.

Risulta pure dall'elenco degli individui di *Ageniaspis* ottenuti da 21 crisalidi di *Prays*, che gli individui di ciascuna crisalide sono tutti del medesimo sesso. Avendo io constatato che tanto nell'uovo partenogenetico come in quello fecondato avviene la formazione di ambedue i globuli polari, e che il pronucleo femminile da solo si sviluppa ulteriormente nelle uova partenogenetiche, si può ritenere come certo che la determinazione del sesso è dovuta, come nel *Litomastix truncatellus*, alla fecondazione; che cioè uova fecondate diano soltanto femmine e uova partenogeniche soltanto maschi.

Conclusione.

I fatti principali che risultano dalle mie ricerche sullo sviluppo dell'*Ageniaspis fuscicollis* parassita endofago del *Prays oleellus*, sono:

1° Che nella maturazione dell'uovo partenogenetico come in quello fecondato si ha la formazione di due globuli polari e che essi per lo più restano fra di loro distinti e formano ciò che il Marchal chiamò *paranucleo* del *trophamnios*, che si divide sempre direttamente e irregolarmente;

2° Che non tutto il protoplasma dell'uovo prende parte alla formaziene delle cellule embrionali, ma che la parte anteriore di esso contenente i globuli polari e forse la parte periferica di tutto il resto di esso, costituisce un involucro, prima intorno a tutte le cellule embrionali, poi intorno a tutta la massa poliembrionale ed a ciascun embrione, involucro che dal Marchal ha ricevuto per la sua funzione il nome di *trophamnios*.

Nell'*Ageniaspis fuscicollis* la parte polare dell'ooplasma ed i globuli polari assumono una funzione protettiva e di nutrizione della parte embrionale dell'uovo come appunto avevo io sospettato dopo lo studio della formazione e del destino dei globuli polari nel *Litomastix truncatellus*. Ormai anche per l'*amnios* o *trophamnios* dei *Proctotrypidae* ed altri Imenotteri parassiti, si può con molta probabilità di non errare ammettere una origine uguale a quella da me per il primo descritta nel *Litomastix truncatellus* ed ora nell'*Ageniaspis fuscicollis*.

Pertanto intorno al particolare destino dei globuli polari in molti Imenotteri parassiti non può cadere ormai dubbio alcuno, e con la scorta di tali fatti si potrà in altri insetti ed in altri animali riprendere le ricerche intorno ai globuli polari con probabilità di scoprire altre cose interessanti.

Commemorazione di Cristoforo Colombo, letta dal Socio Dalla Vedova, nella seduta del 20 maggio 1906.

In questo giorno si compiono i quattrocent'anni dalla morte di Cristoforo Colombo, mancato a' vivi il 20 maggio 1506.

Parecchi comitati e parecchi sodalizi scientifici in Italia e fuori si disposero a solennizzare questa ricorrenza storica e la nostra Accademia fu espressamente invitata dalla *Sociedad Mexicana de Geografia y Estadistica* ad associarsi alla sua commemorazione.

In verità noi Italiani non dureremo fatica ad assentire di gran cuore a questo omaggio tributato alla memoria del nostro glorioso connazionale; e ciò tanto più, venendoci l'invito da un paese, verso il quale fu il Colombo stesso ad aprire per sempre la via attraverso il temuto *Mare tenebrosum* e dai discendenti di quella nazione spagnuola, senza la cui magnanima Regina sarebbero forse svanite infruttuosamente le insigni virtù del grande navigatore.

La quale ultima osservazione mi è particolarmente suggerita dalla memoria di uno strano monito, che sentii rivolgere all'Italia nel VII Congresso internazionale degli Americanisti, tenuto a Berlino nel 1888; dove, avendo io riferito su quanto stava allora facendosi in Italia per celebrare degnamente il IV Centenario della scoperta dell'America, cioè a dire avendo fornito qualche particolare sui lavori avviati a Roma per la pubblicazione della monumentale *Raccolta Colombiana*, uno Spagnuolo venne su a dire, che avrebbero fatto bene gl'Italiani a restringere le loro ricerche alla sola genealogia di Cristoforo Colombo, perchè infine, quanto alla grande impresa, tutte le navi e tutti gli equipaggi, tranne Colombo, erano spagnuoli (1).

Non fu difficile allora ridurre alla giusta misura l'intemperante osservazione; ma le risposte migliori vennero qualche anno più tardi, quando uscirono i 14 grandi volumi della *Raccolta Colombiana* ed il Presidente della R. Società Geografica di Londra ne dava notizia a' suoi colleghi con parole di alta ammirazione, notando che l'Italia « non avrebbe potuto con- « tribuire in modo più degno e più splendido a solennizzare il IV Cente- « nario della scoperta fatta dal suo illustre figlio » (2) e Sophus Ruge, il più competente storico delle scoperte geografiche allora vivente in Germania, scriveva che la nostra Raccolta « fu l'unica grande opera compiuta a spese « di uno Stato, che sia comparsa in occasione del giubileo colombiano.

(1) V. *Congrès intern. des Américanistes*, Compte rendu de la septième Session, Berlin, 1890, pag. 69.

(2) V. *Geographical Journal*, Londra, 1894, luglio, pag. 33.

La « Spagna (così continuava il Ruge) si contentò di organizzare delle feste » (1).

Ma ora, l'invito che ci giunge dal Messico s'inspira a concetti ben più larghi ed elevati; e noi non possiamo che accoglierlo con animo riconoscente ed unirci alla nobile nazione messicana nel rivolgere un mesto pensiero alla data memoranda.

Io non credo che in questa sede ed in questa occasione convenga ripetere ciò che tutti sanno della gloria e delle avversità di Cristoforo Colombo o della importanza della sua scoperta. Dopo quattro secoli di pensiero e di lavoro rivolti allo studio del celebre Ligure, dopochè intorno al grandioso soggetto si provarono come a gara storici, letterati e poeti, filosofi, critici, eruditi, tutti insomma i generi della letteratura, come tutte le forme dell'arte, non sarebbe guari difficile, ma non giudico altrettanto opportuno, di far posto qui ad uno dei soliti compendî più o meno generici delle glorie colombiane. Sarò quindi assai breve.

Tutti sanno qui, che nello stato presente degli studi conviene distinguere un Cristoforo Colombo della leggenda ed un Cristoforo Colombo della critica; che ormai si considerano come leggenda molte delle notizie recate dalla biografia di Cristoforo Colombo scritta da suo figlio Fernando; che fra i critici una parte attende ad assalire ed una parte a difendere e che quando talvolta si potrebbe credere acquetata la disputa, questa di bel nuovo si riaccende rifacendosi da capo.

Così alle glorificazioni che accompagnarono le feste colombiane del 1892 segue ora un nuovo periodo di accuse; e quasi parodiando il fato cui soggiacque Colombo in vita, pare si vogliano far seguire alla apoteosi del primo ritorno l'ingratitudine e le persecuzioni che lo trassero a morir dimenticato a Valladolid. Certo si può affermare che non v'ha movimento del suo pensiero, non ripostiglio del suo animo che non siano stati scrutati, rovistati, sottoposti alla tortura d'una critica non sempre equanime, non di rado pedantesca ed inutile.

Infatti tutte queste critiche delle gesta di Colombo possono raccogliersi in tre gruppi, cioè quelle che riguardano il suo grado di cultura, quelle che si appuntano alle sue qualità morali, quelle che ricercano l'originalità della sua impresa.

Ma infine, che cosa si vuole ora dimostrare? Che Cristoforo Colombo non assomiglia troppo agli esploratori scientifici dei secoli XVIII e XIX, ai La Perouse, ai James Cook, ad Alessandro di Humboldt, a John Franklin e via dicendo, ma piuttosto ai navigatori di ventura del secolo XV? Davvero una bella novità; vecchia però di almeno quarant'anni, dacchè era stata messa innanzi e anatomizzata in ogni sua parte tra gli altri anche da quel

(1) V. *Peterm. Geograph. Mitt.*, Gotha, 1895, dicembre, pag. 279.

critico poderoso che fu Oscar Peschel (1); una novità per la quale un critico poco attento potrebbe trovarsi a dover concludere che tra le colpe di Colombo va registrata anche questa di non essere nato un tre secoli più tardi!

E intanto si passa in seconda linea o si dimentica un'altra considerazione ben altrimenti di gran peso.

Più o meno virtuoso o vizioso ch'egli fosse, più o meno dotto od ignorante; antiche o nuove che fossero le idee da lui poste a fondamento della sua navigazione; l'importanza ed il merito essenziale della sua opera rimangono sostanzialmente gli stessi.

Anzi noi andiamo anche più in là. La possibilità teorica di raggiungere l'estremo oriente navigando, dall'estremo occidente d'Europa, verso occidente, cioè il proposito, come ripeteva Colombo, di *buscar el levante por el poniente* era anche ai tempi suoi così poco un'idea nuova, che egli stesso e gli altri contemporanei intendevano corroborarla richiamandosi addirittura alla classica antichità. Ed è pur noto d'altra parte con quanta cura Colombo stesso andò raccogliendo indizî sulla esistenza di terre lontane oltre il gran Mare Oceano, per dimostrare a sè stesso, e sopratutto agli altri, cioè a chi doveva fornirgli i mezzi di viaggio, la sodezza del suo disegno.

Intorno ai quali indizî si rimise a nuovo, or non è molto, anche una questione discussa ed abbandonata da tempo: intendo riferirmi a talune affermazioni del Vignaud e di alcuni suoi seguaci, alle quali per verità risposero già vittoriosamente autorevoli critici, tra cui in prima linea il nostro Gustavo Uzielli (2). Per i nuovi censori Colombo non sarebbe stato il primo Europeo che approdò alle isole dell'America centrale; perchè le cose sarebbero andate così. Mentre Colombo, alcuni anni prima della sua celebre traversata, dimorava a Madera, egli avrebbe ospitati taluni naviganti, unici superstiti dell'equipaggio d'una nave spinta dai venti alle Antille e di là ritornata a stento ed approdata a Madera. Ma qui in breve i superstiti morirono tutti, non morì però con loro il segreto delle nuove terre: giacchè l'ultimo di loro, il pilota, che si spense proprio nella stessa casa di Colombo ed era suo amico, confidò al suo ospite tutte le sue informazioni e gli appunti di bordo e spirò. Ecco dunque dimostrato come Colombo conosceva già da prima la via da seguire e la terra ove dar fondo.

Tutto questo si conclude e si afferma ora, imbastendo insieme notizie di varî autori, vaghe, tardive, discordanti, note e screditate da gran tempo e che, all'infuori di altre ragioni, hanno in sè stesse, secondo me, la prova più sicura della loro inconsistenza. Una delle due infatti. Se Colombo avesse posseduto quel segreto, come mai non si sarebbe servito di un argomento

(1) V. Peschel O., *Das Zeitalter der Entdeckungen* e *Geschichte der Erdkunde*, Monaco, 1865, seconda ediz. 1877, ecc.

(2) V. Uzielli G., Toscanelli, *Colombo e la leggenda del pilota*, in *Rivista geograf. ital.* Roma, 1902, I. 3 ed altrove.

così irresistibile a persuadere chi doveva somministrargli i mezzi per navigare, della certezza assoluta di future scoperte? E se ciò allora non fece, giacchè ciò non risulta in nessun modo, se in quel momento decisivo egli preferì tenere per sè il segreto di cui, notisi bene, egli era ormai l'unico possessore, quale inaudita imprudenza non sarebbe stata la sua di lasciarselo sfuggire più tardi, senza bisogno, senza prò, anzi con tanto pregiudizio della sua gloria? Giacchè, se non lo svelava egli stesso, si domanda come gli storici lo avrebbero poi potuto conoscere!

Ma lasciamo da parte la storiella del pilota. Per me il fatto più importante da mettere in sodo, si trova altrove e rimane intatto nel suo valore anche dopo tutte le contestazioni e tutte le censure.

Ed il fatto è questo.

L'opera di Cristoforo Colombo si differenzia sostanzialmente da quella degli esploratori che lo precedettero ed inaugura un metodo di ricerca del tutto nuovo e che d'allora in poi non fu più abbandonato.

Prima di lui si procedeva nelle navigazioni di scoperta sulla scorta di un grossolano empirismo: il concetto fondamentale di Colombo era invece assolutamente razionale, assolutamente scientifico. Per le esplorazioni dei Portoghesi, i quali cercavano, non altrimenti di Colombo, la via delle Indie, non occorreva affrontare in pratica la dottrina scientifica della sfericità della Terra. Girando l'Africa, i Portoghesi avrebbero dovuto giungere alle Indie che diciamo orientali, sferica o piana che fosse la forma della Terra. Per Colombo la dottrina della sfericità era il postulato ed il caposaldo di tutta l'impresa. Sta bene che per gli astronomi di professione era ormai dottrina indiscutibile: ma era un procedimento inusitato, era un fatto assolutamente nuovo quello di mettere in giuoco su di essa per la prima volta la riputazione, l'avvenire e la vita. Agli scienziati, poco numerosi allora, questo poteva non parere un grande sforzo; ma non si può dimenticare che, fuori dall'osservatorio, nella vita d'azione, erano a quei tempi ancora in pieno vigore i pregiudizî medievali; che nel caso migliore bisognava affrontare i terrori dell'ignoto per una distesa di molte migliaia di miglia, attraverso un mare popolato dalla fantasia e dall'ignoranza di ogni sorta di chimere paurose: e quando s'insiste tanto a ripetere che Colombo era uomo di poca cultura, si accresce a dismisura la nostra ammirazione che, ciò malgrado, egli abbia riconosciuta la solidità delle conclusioni teoriche con quella fede incrollabile che tanto faticò ad infondere negli altri e che finalmente lo condusse al trionfo.

Un abisso divideva allora il concetto d'una navigazione occidentale dalla sua pratica attrazione. All'abbrivo di Colombo dalla Spagna nel 1492 era stata dimostrata ai Portoghesi già da diciott'anni, non che la possibilità, la singolare opportunità del tragitto occidentale, senza che nel frattempo essi, tanto intraprendenti, ardimentosi ed esperti marinai, sostenuti proprio in quei giorni dalla munificenza della corte, avessero neppur tentato seriamente il

grande problema. Colombo che la sostenne, fu giudicato per tanto tempo un visionario!

Intanto badiamo agli effetti. A progredire nelle scoperte lungo le coste africane dal Marocco al Capo di Buona Speranza, i Portoghesi col loro metodo avevano penato più di 60 anni: Colombo col metodo suo giungeva dalle Canarie in America, aprendosi il varco d'un tratto, e per una via non molto meno lunga della portoghese, in non più di 34 giorni (1).

E da allora in poi il metodo razionale ch'egli primo adottò rimase acquisito alla pratica di tutte le esplorazioni, dalle epopee dei conquistatori spagnuoli alle navigazioni di Magellano e di tutti i posteriori. In ciò Colombo fu un innovatore, un vero caposcuola e vanno fuori di strada i critici che, come scrisse testè Benedetto Croce « introducono nei *Sepolcri* i vizii di Ugo Foscolo o nel *Novum organum* le baratterie di Francesco Bacone » (2); e che indugiandosi troppo a sottilizzare su caratteri che furono comuni a Colombo ed agli uomini della sua classe e del suo tempo, trascurano di mettere in piena luce ciò per cui egli indiscutibilmente sta solo e « sovra gli altri com'aquila vola ».

Tutto questo è lecito affermare in omaggio alla storia generale dei progressi umani, cioè senza tener conto per nulla del fatto che Colombo nacque in Italia; perchè ci giova stare in guardia contro noi stessi e non dar esca alla gelosia di certi studiosi stranieri, i quali, come lo Spagnuolo di Berlino cui accennai, non ammettono affatto che noi abbiamo ad accorgerci delle glorie nostre. Penso questa volta ad un'amara osservazione, o più veramente ad un'aspra requisitoria a noi dedicata da Enrico Harrisse, l'insigne cultore di studî sulla scoperta dell'America. In un suo lavoro uscito colla data commemorativa del 12 ottobre 1892 egli non ci può perdonare di aver osato intraprendere un'opera come la nostra *Raccolta Colombiana* e finisce col sentenziare che il nostro « venire a parlare della parte avuta dall'Italia nella scoperta d'America è una pretensione orgogliosa, non giustificata nè dalla verità, nè dalla storia » (3).

Ed è proprio vero! Altri Stati v'ebbero parte, come la Spagna, l'Inghilterra, il Portogallo, la Francia ecc., ma non v'ebbe nessuna parte l'Italia, per ragioni molto ovvie: che l'Italia, come Stato, pur troppo, non esisteva e che gli Stati allora in Italia fiorenti avevano più motivo di temere che d'incoraggiare l'apertura della nuova via.

Non fu dunque l'Italia; ma tuttavia sarà permesso di affermare senza offesa della storia che v'ebbero parte, ed una parte principale, cioè non come

(1) V. Dalla Vedova G., *Cristoforo Colombo ed il sig. Oscarre Peschel* in: L'avvenire, rivista universitaria, Padova, 1867, pag. 309; id. *Commemorazione di Cristoforo Colombo* in Atti del I Congresso geograf. ital. Genova, 1904, pag. 177.

(2) V. Giornale d'Italia 1906, n. 139.

(3) Harrisse H, *Christophe Colomb devant l'histoire*. Parigi, Welter, 1892, pag. 86-90.

gregarî, ma come consiglieri, come sollecitatori, come condottieri, non uno solo, ma molti Italiani, da Paolo dal Pozzo Toscanelli, al Vespucci, ai Caboto, al Verazzano, al Pigafetta ed altri minori; e questa medesima molteplicità di nomi sta a provare che non dovette essere un puro caso se anche il sommo fra essi fu un Italiano, come era stato un Italiano, due secoli prima, il più grande degli esploratori di terre, il rivelatore dell'Asia Orientale, Marco Polo.

Iniziative singole, certamente, ma poderose, geniali, a cui gl'Italiani di quei secoli, e non di quei secoli soltanto, erano ben disposti, meglio che all'azione disciplinata collettiva. Iniziative del resto che avevano la loro radice, oltrechè nella tempra nazionale immaginosa e versatile, nell'antica e multiforme esperienza di pubblici negozî, di traffici vicini e lontani, di navigazioni, propria di quella nostra età storica gloriosa.

La nostra *Raccolta Colombiana* non fu dunque il frutto d'una pretensione orgogliosa; anzi al contrario essa sta a provare luminosamente il rispetto disinteressato che noi professiamo alla più rigorosa verità, anche quando questa viene a ferire i nostri più cari sentimenti: tant' è vero che sono proprio le indagini e i documenti in essa contenuti, ai quali i nuovi critici ci fanno l'onore di attingere i materiali su cui fondare molte delle loro conclusioni (1).

Ma orgogliosi di che, se la scoperta del nuovo mondo non fruttò all'Italia nè vantaggi, nè onori, se anzi tutt'altro che giovare al nostro paese ebbe la sua parte nell'affrettarne la decadenza? Perchè, come tutti sanno, per effetto delle nuove vie aperte dai nostri, il centro di gravitazione dei commerci e della civiltà, che fino allora era il Mediterraneo, andò trasportandosi sull'Atlantico e noi per tre secoli e mezzo, fino all'apertura del Canale di Suez, ci trovammo di mano in mano respinti alle spalle del gran movimento dei commerci mondiali; di modo che in uno stesso tempo e per opera di quei nostri e noi eravamo aiutati a decadere e si rafforzavano gli Stati che dovevano far pesare su noi il loro dominio!

Noi fummo giudicati orgogliosi colla stessa giustizia con cui altri volle vedere in Cristoforo Colombo null'altro che un venturiero ardito e fortunato. Invero Colombo cercava il Cipangu di Marco Polo, il Giappone, voleva passare *a donde nacen las especerias* e scoperse un nuovo mondo. Frattanto se a qualunque nocchiero che primo si spingesse oltre verso occidente, la fortuna aveva preparata questa sorpresa, Colombo ebbe a farsele incontro dopo d'aver superate resistenze e ripugnanze infinite in Europa e viaggiando deliberatamente a quella volta per migliaia di miglia.

Più propriamente fortunato fu Cabral, gittato contro voglia dalle correnti e dai venti alle spiaggie del Brasile; più fortunato Vasco di Gama

(1) Vedi ad es. il gran conto ed uso che ne fa G. Marcel nella sua accurata memoria: *Christophe Colomb devant la critique* in: La Géographie, Parigi, Bayle, 1905, XII, pag. 149-162.

che, voltato per favore speciale di venti il Capo di Buona Speranza già da dieci anni scoperto dai suoi, si vide ben presto guidato alla meta sospirata, alle Indie, dall'antica pratica dei piloti africani. La fortuna della scoperta di America non fu di Colombo, fu del genere umano; e Cristoforo non che ne menasse vanto o ritraesse in vita, per essa, alcuna fama, ma neppur mai, com'è noto, la conobbe; ed il genere umano, quasi a prova che la tenne per sua, rifiutò perfino alla scoperta il nome dello scopritore, per darle quello di un altro Italiano che, al pari di Colombo, morì credendo di aver visitate e descritte non altre contrade che dell'Asia. E se Colombo fosse più a lungo vissuto (i critici non sono d'accordo sulla sua età ed in attesa di nuovi documenti differiscono fra loro di decine d'anni), egli avrebbe dovuto sacrificare a quella sua usuraia fortuna le più ferme convinzioni e veder crollare i suoi principali asserti per opera di coloro ch'egli aveva rimorchiati nell'occidente.

Sic vos non vobis: questo possono ripetere gli Italiani de' grandi successi allora ottenuti da Colombo e dagli altri scopritori connazionali; questo poteva ripetere anche Colombo a sè stesso nell'abbandono e nella tristezza de'suoi ultimi giorni.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Ciamician, relatore, a nome anche del Corrispondente Nasini, legge una Relazione sul lavoro del prof. G. Carrara intitolato: *Elettrochimica delle soluzioni non acquose*, proponendone l'inserzione nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate salvo le consuete riserve.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Lucca; l'Accademia delle scienze di Nuova York; l'Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società Reali di Londra e di Vittoria; le Società geologiche di Manchester, di Sydney e di Edinburgo; la Società zoologica di Tokyo; la Società geografica del Cairo; il Museo nazionale di Copenaghen; il Museo di storia naturale di Nuova York; l'Osservatorio di S. Fernando; le Università di Glasgow, di St. Louis e di Cambridge Mass.

V. C.